

*„Sie müssen das Buch so schreiben, dass alles drin ist, aber man es trotzdem versteht!“*  
(Aufforderung einer Schülerin)

**Liebe Schülerinnen und Schüler,**

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.
- eine gute Note in der Abiturprüfung zu erreichen.

**Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,**

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.
- den Notendurchschnitt Ihrer Klasse in der Abiturprüfung zu optimieren.

**EXTRA**

100 Videos des Autors, welche zu 79 Themenvideos zusammengestellt wurden. Hier werden alle Stoffzusammenfassungen nochmals erklärt.

Zugriff auf die Themenvideos über Kurzadresse oder QR-Code aus dem Buch.

## Inhaltsverzeichnis

<b>I.</b>	<b>Grundlagen Analysis</b>	9
<b>1</b>	<b>Funktionen</b>	10
1.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	10
1.2	Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen	12
1.3	Gebrochenrationale Funktionen	14
1.4	Exponentialfunktionen	16
1.5	Trigonometrische Funktionen	18
1.6	Übersicht: Spiegeln, Strecken und Verschieben	20
1.7	Funktionenscharen	22
<b>2</b>	<b>Analysis im wirtschaftlichen Kontext (Grundlagen)</b>	24
2.1	Monopol vs. Polypol: Einordnung und Ausblick	24
2.2	Relevante Funktionen: Aussagekraft und Zusammenhang	26
2.3	Funktionstypen in wirtschaftlichen Anwendungen	28
2.4	Zusatz: Marktgleichgewicht bei Polypol (linearer Fall)	30
2.5	Zusatz: Kosten, Erlöse und Break-Even bei Polypol (linearer Fall)	31
<b>3</b>	<b>Gleichungen</b>	32
3.1	Gleichungstypen: Übersicht	32
3.2	Gleichungstypen: Konkretes Lösungsvorgehen	34
3.3	Polynomdivision	40
3.4	Goldene Regeln zum Lösen von Gleichungen	42
3.5	Lineare Gleichungssysteme	44
<b>4</b>	<b>Differenzialrechnung (allgemein)</b>	46
4.1	Ableitungsregeln	46
4.2	Tangente	49
4.3	Monotonie	52
4.4	Krümmung	53
4.5	Extrempunkte (Hochpunkte und Tiefpunkte)	54
4.6	Wendepunkte	55
4.7	Sattelpunkte	56
4.8	Zusammenhang zwischen den Schaubildern von Funktion und Ableitung	58
4.9	Aufstellen von Funktionsgleichungen („Steckbriefaufgaben“)	60
4.10	Extremwertaufgaben	62
4.11	Wachstum und Zerfall	64
<b>5</b>	<b>Differenzialrechnung (im wirtschaftlichen Kontext)</b>	66
5.1	Der Produktlebenszyklus	66
5.2	Die ertragsgesetzliche Kostenfunktion	67
5.3	Kostenanalyse: Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze	68
5.4	Kostenanalyse: Betriebsoptimum und langfristige Preisuntergrenze	69
5.5	Gewinnanalyse bei Polypol (vollständiger Konkurrenz)	70
5.6	Gewinnanalyse bei Monopol	71

5.7	Isoquante, Isokostengerade und Minimalkostenkombination . . . . .	72
5.8	Zusatz: Elastizitäten . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Integralrechnung (allgemein)</b> . . . . .	<b>76</b>
6.1	Integrationsregeln („Ableitungsregeln“) . . . . .	76
6.2	Flächeninhaltsberechnung zwischen Schaubild und x-Achse . . . . .	80
6.3	Flächeninhaltsberechnung zwischen zwei Schaubildern . . . . .	82
6.4	Bedeutungsmäßiger Zusammenhang von Funktion und Ableitungsfunktion . . . . .	84
6.5	Anwendungsaufgaben: Von der Aufgabenformulierung zum Rechenansatz . . . . .	85
6.6	Mittelwert (durchschnittlicher y-Wert) einer Funktion . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Integralrechnung im wirtschaftlichen Kontext</b> . . . . .	<b>88</b>
7.1	Marktgleichgewicht, Konsumenten- und Produzentenrente (an quadratischen Funktionen) . . . . .	88
7.2	Marktgleichgewicht, Konsumenten- und Produzentenrente (an Exponentialfunktionen) . . . . .	90
<b>II.</b>	<b>Grundlagen Stochastik</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>1</b>	<b>Baumdiagramme und Pfadregeln</b> . . . . .	<b>94</b>
1.1	Einführung . . . . .	94
1.2	Aufgabentypen . . . . .	97
<b>2</b>	<b>Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel</b> . . . . .	<b>100</b>
2.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit (Satz von Bayes) . . . . .	100
2.2	Unabhängigkeit . . . . .	102
2.3	Vierfeldertafel . . . . .	103
2.4	Zusammenhänge und Vernetzung . . . . .	104
<b>3</b>	<b>Zufallsvariable und Erwartungswert</b> . . . . .	<b>110</b>
<b>4</b>	<b>Binomialverteilung</b> . . . . .	<b>114</b>
4.1	Bernoulli-Formel . . . . .	114
4.2	Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung . . . . .	118
4.3	Erwartungswert und Standardabweichung . . . . .	119
4.4	Aufgabentypen zur Binomialverteilung . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Normalverteilung</b> . . . . .	<b>122</b>
5.1	Einführung . . . . .	122
5.2	Aufgabentypen . . . . .	123
5.3	Die Sigma-Regeln . . . . .	124
5.4	Die Normalverteilung für binomialverteilte Probleme nutzen . . . . .	124
5.5	Aufgabentypen . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Vertrauensintervalle (Konfidenzintervalle)</b> . . . . .	<b>126</b>
6.1	Vertrauensintervalle für spezielle Sicherheitswahrscheinlichkeiten . . . . .	126
6.2	Vertrauensintervalle für beliebige Sicherheitswahrscheinlichkeiten . . . . .	129
6.3	Stichprobenumfang und Länge des Vertrauensintervalls . . . . .	130
6.4	Zusammenhang: Sigma-Regeln und Vertrauensintervalle . . . . .	131

<b>III.</b>	<b>Grundlagen Lineare Algebra</b>	133
<b>1</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	134
<b>2</b>	<b>Matrizen und ihre Anwendungen</b>	136
2.1	Begriffe zur Matrix	136
2.2	Rechnen mit Matrizen	137
2.3	Die inverse Matrix	138
2.4	Matrizengleichungen	139
<b>3</b>	<b>Lineare Verflechtungen bei Produktionsprozessen</b>	140
3.1	Zweistufige Produktionsprozesse	140
3.2	Einstufige Produktionsprozesse (Kurzform)	145
<b>4</b>	<b>Das Leontief-Modell</b>	146
4.1	Input-Output-Tabelle, Gozintograph und Leontief-Annahme	146
4.2	Inputmatrix (Technologiematrix)	147
4.3	Leontief-Gleichung	147
<b>5</b>	<b>Übergangsprozesse</b>	150
5.1	Stochastische Austauschprozesse (Markov-Modell)	150
5.2	Stabiler Vektor (stationäre Verteilung) und Grenzmatrix	152
5.3	Absorbierender Zustand	153
5.4	Zyklische Populationsprozesse	153
<b>IV.</b>	<b>Grundlagen Analytische Geometrie</b>	155
<b>1</b>	<b>Vorwissen (Punkte, Vektoren, Rechenoperationen)</b>	156
<b>2</b>	<b>Das Vektorprodukt zur Flächen- und Volumenberechnung</b>	160

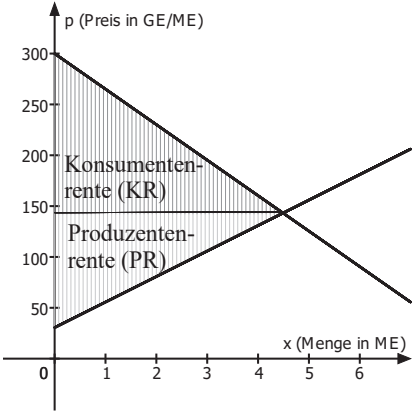
## 2. Analysis im wirtschaftlichen Kontext (Grundlagen)

### 2.1 Monopol vs. Polypol: Einordnung und Ausblick

(Angebots-) Monopol	Polypol (vollständige Konkurrenz)
<b>Begriff</b>	
<b>Ein</b> Anbieter (Monopolist) Viele Nachfrager	<b>Viele</b> Anbieter Viele Nachfrager
<b>Grundsätzlicher Unterschied: Bildung des Preises</b>	
<b>Monopolist setzt</b> den Preis fest, welcher für ihn optimal ist.	Preis <b>bildet sich</b> durch Angebot und Nachfrage am Markt.
<b>Wie bildet sich der Preis?</b>	
<b>Monopolist berechnet</b> den Preis, bei welchem er den maximalen Gewinn erzielt und legt diesen fest. (S. 71)	Durch den <b>Schnittpunkt</b> der Angebotsfunktion $p_A$ und der Nachfragefunktion $p_N$ <b>ergibt sich</b> der Gleichgewichtspreis $p_G$ .
<b>Allgemeiner Aufbau der Erlösfunktion?</b>	
$E(x) = p_N(x) \cdot x$ (mit $p_N(x)$ : Preis-Nachfrage-Funktion)	$E(x) = p_G \cdot x$ (Preis ist nach Bildung am Markt fest.)
<b>Optimale Verkaufsmenge für den Anbieter?</b>	
Bei der Berechnung des Preises (s. o.) <b>berechnet</b> der <b>Monopolist</b> auch die die gewinnoptimale Verkaufsmenge. (S. 71)	Anhand des nun festen Preises (s. o.) <b>berechnet</b> der <b>Anbieter</b> die für ihn gewinnoptimale Verkaufsmenge. (S. 70)



Weitere typische Fragestellungen

(Angebots-) Monopol	Polypol (vollständige Konkurrenz)
<b>Kostenanalyse</b>	
Betriebsminimum (kurzfristige Preisuntergrenze) bzw. Betriebsoptimum (langfristige Preisuntergrenze) (S. 68 - 69)	
<b>Gewinnanalyse</b>	
mit Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$ $= p_N(x) \cdot x - K(x)$	mit Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$ $= p_G \cdot x - K(x)$
<b>Produzenten- und Konsumentenrente</b>	
	 <p style="text-align: center;">(S. 88)</p>

## 2.2 Relevante Funktionen: Aussagekraft und Zusammenhang

Hier sind wesentliche Funktionen dargestellt, die im wirtschaftlichen Kontext eine Rolle spielen. Die Aussagekraft der Funktionen und deren Zusammenhang zu verstehen, erleichtert die Bearbeitung der Problemstellungen in den Kapiteln 5 und 7.

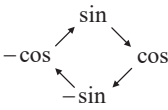
Bezeichnung und Beispiel	Aussagekraft (am Beispiel)
<b>Fixe Kosten</b> $K_{fix} = 100$	Im Betrieb fallen 100 GE an fixen Kosten (Miete, Zinsen, ...) an, unabhängig davon welche Menge produziert wird.
<b>Variable Gesamtkostenfunktion</b> $K_V(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$	$K_V(8) = 1224$ Durch die Herstellung von 8 ME, fallen 1224 GE an variablen Kosten (Material, ...) an.
<b>Gesamtkostenfunktion</b> $K(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 100$ $(K(x) = K_{fix} + K_V(x))$	$K(8) = 1324$ Wenn 8 ME hergestellt werden, fallen hierfür insgesamt 1324 GE an Kosten (fix + variabel) an.
<b>Grenzkosten</b> $K'(x) = 6x^2 + 6x + 1$	$K'(2) = 30$ Wenn ausgehend von 2 ME eine (minimale) ME mehr produziert wird, führt diese zu Mehrkosten von 30 GE pro ME.
<b>Variable Stückkostenfunktion</b> $k_V(x) = \frac{K_V(x)}{x} = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x}$ $= 2x^2 + 3x + 1$	$k_V(8) = \frac{1224}{8} = 153$ Wenn 8 ME hergestellt werden, fallen hierfür <b>pro Stück</b> 153 GE an variablen Kosten an.
<b>Stückkostenfunktion</b> (Durchschnittskosten) $k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 100}{x}$ $= 2x^2 + 3x + 1 + \frac{100}{x}$	$k(8) = \frac{1324}{8} = 165,5$ Wenn 8 ME hergestellt werden, fallen hierfür <b>pro Stück insg.</b> 165,5 GE an Kosten an.

Bezeichnung und Beispiel	Aussagekraft (am Beispiel)
<b>Angebotsfunktion (bei Polypol)</b> $p_A(x) = 2x + 5$	$p_A(8) = 21$ Bei einem Stückpreis von 21 GE werden 8 ME am Markt angeboten.
<b>Nachfragefunktion (bei Polypol) bzw. Preis-Absatz-Funktion (bei Monopol)</b> $p_N(x) = 200 - 5x$	$p_N(8) = 160$ Bei einem Stückpreis von 160 GE werden 8 ME am Markt nachgefragt.
<b>Erlösfunktion bei Polypol</b> $E(x) = p \cdot x = 150 \cdot x$ (bei Preis $p = 150$ ) <b>Erlösfunktion bei Monopol</b> $E(x) = p_N(x) \cdot x = (200 - 5x) \cdot x$ (bei Nachfragefunktion $p_N(x) = 200 - 5x$ )	$E(8) = 1200$ bzw. $E(8) = 1280$ Wenn 8 ME verkauft werden erwirtschaftet der Betrieb einen Umsatz/Erlös von 1200 bzw. 1280 GE.
<b>Gewinnfunktion bei Polypol</b> $G(x) = E(x) - K(x)$ $= 150x - (2x^3 + 3x^2 + x + 100)$ $= -2x^3 - 3x^2 + 149x - 100$ <b>Gewinnfunktion bei Monopol</b> $G(x) = E(x) - K(x)$ $= (200 - 5x) \cdot x - (2x^3 + 3x^2 + x + 100)$ $= -2x^3 - 8x^2 + 199x - 100$	$G(8) = 325$ bzw. $G(8) = 445$ Wenn 8 ME verkauft werden erwirtschaftet der Betrieb insgesamt einen Gewinn von 325 bzw. 445 GE.
<b>Deckungsbeitragsfunktion</b> $DB(x) = E(x) - K_v(x) = G(x) + K_{fix}$ $= -2x^3 - 3x^2 + 149x$	$DB(8) = 425$ Wenn 8 ME verkauft werden erwirtschaftet der Betrieb insgesamt einen Deckungsbeitrag („Gewinn ohne Berücksichtigung der Fixkosten“) von 425 GE.



## 4. Differenzialrechnung

### 4.1 Ableitungsregeln

Nr.	Beispiel	Vorgehen
<b>Elementarregeln</b>		
<b>1</b>	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$  $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x^1 = 2x$  $f(x) = x$ $f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$  $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$f(x) = x^{\text{Exponent}}$ $f'(x) = \text{Exponent} \cdot x^{\text{Exponent}-1}$ (Potenzregel)  <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; background-color: #f0f0f0;"> <b>Vor dem Ableiten</b>   <math>\frac{1}{x^n} = x^{-n}</math>  <math>\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}</math> </div>
<b>2</b>	$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$	<i>Abschreiben</i>
<b>3</b>	$f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$	 (Im Uhrzeigersinn!)
<b>4</b>	$f(x) = \cos(x)$ $f'(x) = -\sin(x)$	



Nr.	Beispiel	Vorgehen
<b>Vorgehensregeln</b>		
5	$f(x) = 3 \cdot x^2$ $f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$	„Zahlen“ mit $\cdot$ oder $:$ „bleiben“ (Faktorregel)
6	$f(x) = x^2 + 2$ $f'(x) = 2x$	„Zahlen“ mit $+$ oder $-$ „verschwinden“
7	$f(x) = x^2 - 4x$ $f'(x) = 2x - 4$	$+$ und $-$ Zeichen unterteilen die Funktion in Teilfunktionen, welche einzeln abgeleitet werden (Summenregel)

**Hinweis : Ableiten bei Funktionenscharen**

Der Parameter  $t$  wird beim Ableiten wie eine Zahl und nicht wie die Variable  $x$  behandelt.

Beispiel:  $f_t(x) = t^2 x^3 + t$   
 $f'_t(x) = 3t^2 x^2$

<b>Produktregel</b>		
8	$f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$ $f'(x) = 2x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot e^{2x} \cdot 2$	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ <i>Ableiten <math>\cdot</math> Abschreiben + Abschreiben <math>\cdot</math> Ableiten</i>

<b>Quotientenregel (Zusatz)</b>		
9	$f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}}$ $f'(x) = \frac{2x \cdot e^{2x} - x^2 \cdot e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x})^2}$ $= \frac{2x \cdot e^{2x} - 2x^2 \cdot e^{2x}}{e^{4x}}$	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

## 5.7 Isoquante, Isokostengerade und Minimalkostenkombination

**Beispiel :** Zur Fertigung eines Produktes werden die beiden Produktionsfaktoren Arbeit ( $x$ ) und Kapital ( $y$ ) gemäß der Produktionsfunktion  $c(x, y) = 4 \cdot x^2 \cdot y$  eingesetzt.

Es sollen 160 Mengeneinheiten (ME) des Produktes hergestellt werden.

Eine ME des Faktors Arbeit kostet 25 GE, eine ME des Faktors Kapital kostet 20 GE.

Bestimmen Sie die Minimalkostenkombination.

### 1. Von der Produktionsfunktion zur Isoquanten

#### • Die Produktionsfunktion

$$c(x, y) = 4 \cdot x^2 \cdot y$$

Gibt die Produktionsmenge  $c$  an, welche durch den Einsatz von  $x$  ME Arbeit und  $y$  ME Kapital erzeugt wird.

#### • Die allg. Isoquantenfunktion I

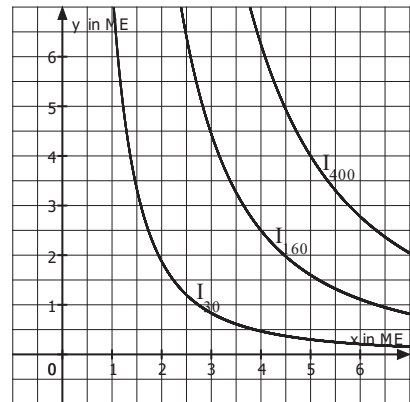
$$c = 4 \cdot x^2 \cdot y \quad | : 4 : x^2 \quad (\text{auflösen nach } y)$$

$$\frac{c}{4 \cdot x^2} = y \quad \text{somit } I_c(x) = \frac{c}{4 \cdot x^2}$$

#### • Isoquantenfunktion für geg. Produktionsmenge

$$\text{Für } c = 160 \text{ erhält man } I_{160}(x) = \frac{160}{4 \cdot x^2} = \frac{40}{x^2}$$

Die Punkte auf dem zugehörigen Schaubild  $I_{160}$  stellen alle möglichen Kombinationen der beiden Faktoren  $x$  und  $y$  dar, die zu einer Produktionsmenge von 160 ME führen.



#### Hinweis : Die Grenzrate der Substitution

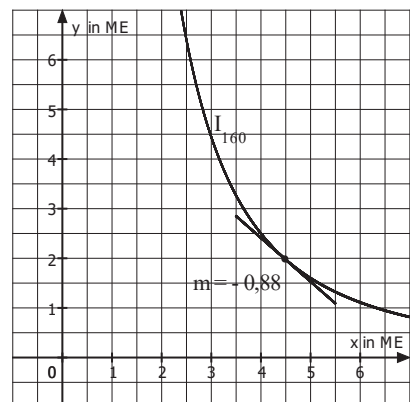
Entspricht der Steigung der Isoquanten und wird mit der **ersten Ableitung** berechnet.

$$I_{160}(x) = \frac{40}{x^2} = 40 \cdot x^{-2};$$

$$I_{160}'(x) = 40 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{80}{x^3}$$

$$\text{Beispiel: } I_{160}'(4,5) = -\frac{80}{4,5^3} \approx -0,88$$

Aktuell werden mit dem Faktoreinsatz  $x = 4,5$  (und  $y \approx 1,98$ ) eine Menge von 160 ME des Produktes hergestellt.



Eine Erhöhung von 1 ME des Faktors  $x$  kann hierbei durch eine Verringerung des Faktors  $y$  um ca. 0,88 ME ausgeglichen werden (sodass noch immer 160 ME hergestellt werden).



## 2. Die Isokostengerade

**Die Gesamtkostenfunktion :**  $K(x, y) = 25x + 20y$

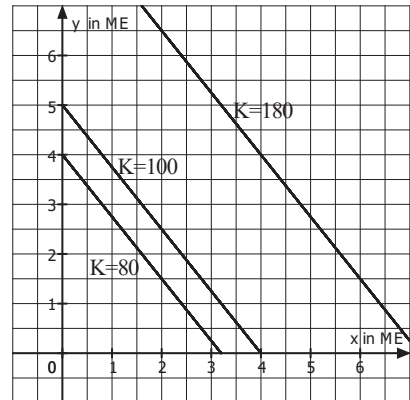
(auflösen nach y)  $K = 25x + 20y \quad | -25x$

$$-25x + K = 20y \quad | :20$$

$$-1,25x + \frac{K}{20} = y$$

Im Koordinatensystem entspricht dies einer Schar aus parallelen Geraden mit **Steigung  $-1,25$** . Den **Isokostengeraden**.

Beispielsweise stellen die Punkte auf dem Schaubild  $K = 100$  alle möglichen Kombinationen der beiden Faktoren dar, die zu Gesamtkosten von 100 GE führen.



## 3. Die Minimalkostenkombination (MKK)

Gesucht ist die Gerade mit dem geringsten y-Achsenabschnitt (geringste Kosten!), welche das Schaubild zu  $I_{160}$  berührt.

**Bedingung : Gleiche Steigung**

$$I_{160}'(x) = -1,25$$

$$-\frac{80}{x^3} = -1,25 \quad | \cdot x^3$$

$$-80 = -1,25x^3 \quad | : (-1,25)$$

$$64 = x^3 \quad | \sqrt[3]{\quad}$$

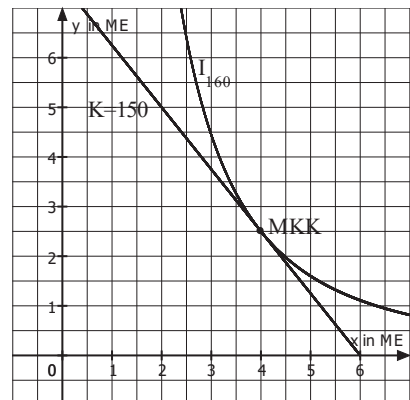
$$4 = x$$

mit  $I_{160}(4) = 2,5$  erhält man die

**Minimalkostenkombination MKK (4 | 2,5)**

Die Produktionsmenge von 160 ME kann zu minimalen Kosten hergestellt werden, wenn  $x = 4$  ME an Arbeit und  $y = 2,5$  ME an Kapital eingesetzt werden.

Die Gesamtkosten betragen dann  $K = 25 \cdot 4 + 20 \cdot 2,5 = 150$  GE.



## 5. Normalverteilung

### 5.1 Einführung

**Beispiel:** Messung der Körpergröße bei einer zufällig ausgewählten männlichen Person.

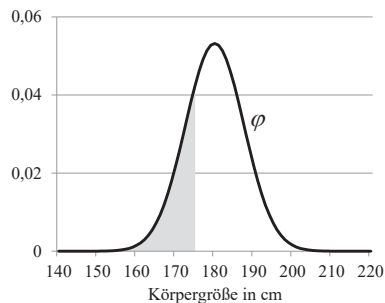
#### 1. Normalverteilung: Dichtefunktion $\varphi$ (Gauß-Kurve)

- Der Bereich um den Erwartungswert (hier  $\mu = 180$  cm) hat die größte Wahrscheinlichkeit.
- Die Standardabweichung (hier  $\sigma = 7,5$ ) bestimmt die Breite der Verteilung.
- Achtung: Funktionswerte von  $\varphi$  stellen nicht die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Werte dar! Die Wahrscheinlichkeit (jedes) einzelnen Wertes beträgt 0%:  $P(X = k) = 0$ .

Grund: Z.B. beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass

jemand (auf unendlich viele Kommastellen) genau 1,70000000 ...0 m groß ist, 0%.

- Über den Inhalt der Fläche unter der  $\varphi$ -Kurve können jedoch Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Die nachfolgende Funktion  $\Phi$  (Integralfunktion zu  $\varphi$ ) gibt diese an.



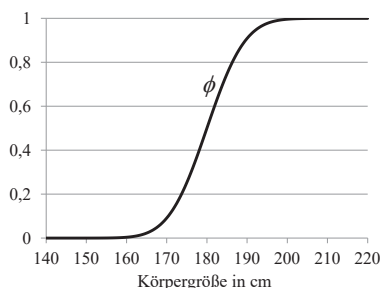
#### 2. „Kumulierte“ Normalverteilung: Verteilungsfunktion $\Phi$

Gibt für jeden möglichen Wert der Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeit an, dass **dieser oder ein geringerer Wert als dieser** angenommen wird.

$$P(X \leq k) = \Phi(k) = \int_{-\infty}^k \varphi(x) dx$$

**Beispiel**

$$P(X \leq 174) = \Phi(174) = \int_{-\infty}^{174} \varphi(x) dx \approx 0,2119$$



Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte männliche Person höchstens 174 cm groß ist, beträgt 21,19 %.

#### Hinweis

Im nachfolgenden Kapitel werden die Aufgabenstellungen jeweils zunächst durch **GTR / CAS (normalcdf)** gelöst.

Es ist jedoch ebenfalls die Lösung mithilfe der **Standardnormalverteilung  $\Phi$**  dargestellt.

Hierbei gilt:  $P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$

## 5.2 Aufgabentypen

**Beispiel :** Die Körpergröße vom Männern ist näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu = 180$  cm und der Standardabweichung  $\sigma = 7,5$  cm.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Mann ...

Aufgabentypen, gelöst mit GTR/CAS	
<b>1. „höchstens <math>k</math>“</b> $P(X \leq k)$ $\approx \text{normalcdf}(-10^{99}; k; \mu; \sigma)$	... höchstens 174 cm groß? $P(X \leq 174)$ $\approx \text{normalcdf}(-10^{99}; 174; 180; 7,5) \approx 0,212$
<b>2. „mindestens <math>k</math>“</b> $P(X \geq k)$ $\approx 1 - \text{normalcdf}(-10^{99}; k; \mu; \sigma)$	... mindestens 192 cm groß? $P(X \geq 192) = 1 - P(X < 192)$ $\approx 1 - \text{normalcdf}(-10^{99}; 192; 180; 7,5)$ $\approx 1 - 0,9452 \approx 0,055$
<b>3. „mind. <math>k_1</math> und höchst. <math>k_2</math>“</b> $P(k_1 \leq X \leq k_2)$ $\approx \text{normalcdf}(k_1; k_2; \mu; \sigma)$	... mind. 183 cm und höchst. 195 cm groß? $P(183 \leq X \leq 195)$ $\approx \text{normalcdf}(183; 195; 180; 7,5)$ $\approx 0,322$
Aufgabentypen, gelöst mit Standardnormalverteilung $\Phi$ (Tabelle)	
<b>1. „höchstens <math>k</math>“</b> $P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$	... höchstens 174 cm groß? $P(X \leq 174) \approx \Phi\left(\frac{174 - 180}{7,5}\right)$ $\approx \Phi(-0,8) \approx 0,212$
<b>2. „mindestens <math>k</math>“</b> $P(X \geq k) \approx 1 - P(X < k)$ $\approx 1 - \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$	... mindestens 192 cm groß? $P(X \geq 192) = 1 - P(X < 192) \approx 1 - \Phi\left(\frac{192 - 180}{7,5}\right)$ $\approx 1 - \Phi(1,6) \approx 1 - 0,9452 \approx 0,055$
<b>3. „mind. <math>k_1</math> und höchst. <math>k_2</math>“</b> $P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1)$ $\approx \Phi\left(\frac{k_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \mu}{\sigma}\right)$	... mind. 183 cm und höchst. 195 cm groß? $P(183 \leq X \leq 195) = P(X \leq 195) - P(X \leq 183)$ $\approx \Phi\left(\frac{195 - 180}{7,5}\right) - \Phi\left(\frac{183 - 180}{7,5}\right)$ $\approx \Phi(2) - \Phi(0,4) \approx 0,9772 - 0,6554 \approx 0,322$

## 4. Das Leontief-Modell

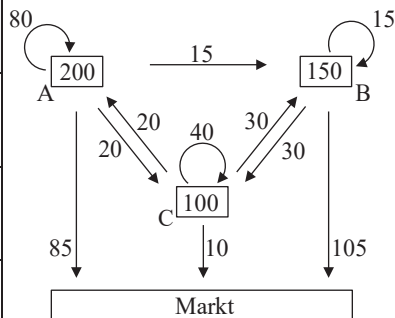
### 4.1 Input-Output-Tabelle, Gozintograph und Leontief-Annahme

Drei Zweigwerke eines Unternehmens beliefern sich gegenseitig und den Markt nach dem Leontief-Modell. Die Verflechtung kann durch die **Input-Output-Tabelle** oder durch ein **Verflechtungsdiagramm** (Gozintograph) dargestellt werden.

**Input-Output-Tabelle**

	(nach) Betrieb A	(nach) Betrieb B	(nach) Betrieb C	Markt $\vec{y}$	Produktion $\vec{x}$
(von) Betrieb A	80	15	20	85	200
(von) Betrieb B	0	15	30	105	150
(von) Betrieb C	20	30	40	10	100

**Verflechtungsdiagramm**



#### Beschreibung (am Beispiel: Betrieb A)

Betrieb A **gibt** 80 Mengeneinheiten (ME) an sich, 15 ME an B und 20 ME an C ab (der innerbetriebliche Absatz von A lautet also:  $80 + 15 + 20 = 115$  ME)

Betrieb A gibt 85 ME an den Markt/Konsum ab.

Insgesamt muss Betrieb A also 200 ME ( $= 115 + 85$ ) herstellen.

#### Hinweise

- Interpretation der Spalte von A: Betrieb A **nimmt** 80 ME von sich selbst, keine Waren von B und 20 ME Waren von C.

**Zeile : „geben“**  
**Spalte : „nehmen“**

- Ablesen aus Tabelle: Marktgabevektor  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 85 \\ 105 \\ 10 \end{pmatrix}$  und Produktionsvektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$ .

- **Leontief-Annahme:** „Die Lieferungen an einen Betrieb steigen oder fallen im gleichen Verhältnis wie die Produktion des Betriebes“.

Beispiel: Wenn Betrieb A statt 200 ME nun die doppelte Menge von 400 ME produzieren müsste, würde er hierfür 160 ME von sich und 40 ME von C, also die doppelten Mengen, benötigen.



## 4.2 Inputmatrix (Technologiematrix)

Die Inputmatrix gibt an, wie die Betriebe untereinander **technisch verflochten** sind. Sie ändert sich – im Gegensatz zur Input-Output-Tabelle - nicht, wenn die Betriebe im nächsten Jahr andere Menge produzieren.

**Berechnung der Inputmatrix T:**

$$T = \begin{pmatrix} \frac{80}{200} & \frac{15}{150} & \frac{20}{100} \\ \frac{0}{200} & \frac{15}{150} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{200} & \frac{30}{150} & \frac{40}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Vorgehen: **Spalte jedes Betriebs** durch seine Produktion teilen (z.B. Spalte von A durch 200 usw.).

**Interpretation der Einträge von A (Inputkoeffizienten):**

Beispielsweise gibt der Wert 0,3 (Eintrag in 2. Zeile, 3. Spalte) an:

Um 1 ME seines Produktes zu produzieren, benötigt der Betrieb C von Betrieb B 0,3 ME von dessen Produkt.

## 4.3 Leontief-Gleichung

Herleitung: Marktabgabe = Produktion – innerbetrieblicher Absatz

$$\vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x}$$

**Gleichung:**  $\vec{y} = (\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \vec{x}$

im Beispiel:

$$\vec{y} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{x}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 0,9 & -0,3 \\ -0,1 & -0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Bezeichnungen:

$\vec{y}$ : Marktabgabe- bzw. Konsumvektor

$\vec{x}$ : Produktionsvektor

T: Inputmatrix bzw. Technologiematrix



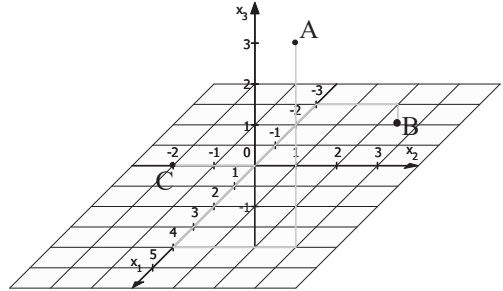
# 1. Vorwissen (Punkte, Vektoren, Rechenoperationen)

## 1.1 Punkte (im $\mathbb{R}^3$ )

Beispiel: A(4|3|5)

Vom **Ursprung** geht man  
4 Einheiten nach vorne, 3 nach rechts und 5  
Einheiten nach oben.

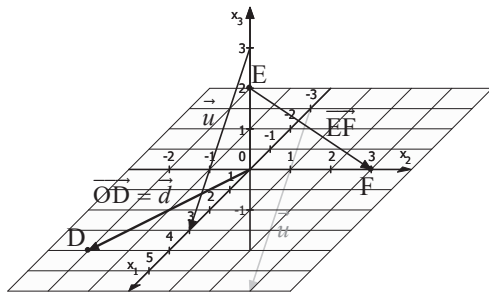
B(-3|2|-0,5); C(0|-2|0)



## 1.2 Vektoren (im $\mathbb{R}^3$ )

Beispiel:  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Von einem beliebigen **Anfangspunkt**  
geht man  
3 Einheiten nach vorne und  
3 Einheiten nach unten.



### Bemerkungen

- **Ortsvektor** eines Punktes: Zeigt vom Ursprung auf den Punkt (also auf einen „Ort“).

Beispiel: D(4|-2|0) und  $\vec{OD} = \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- **Verbindungsvektor** zwischen 2 Punkten:

Beispiel: E(0|0|2) und F(0|3|0)  $\rightarrow \vec{EF} = \vec{f} - \vec{e} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

„Verbindungsvektor = Endpunkt – Startpunkt“

- **Spezielle Vektoren**

Nullvektor  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; Einheitsvektoren:  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

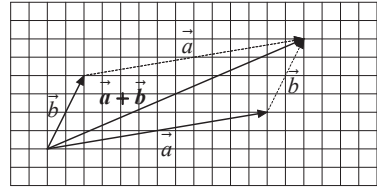


### 1.3 Rechnen mit Vektoren

#### 1. Addition und Subtraktion von Vektoren

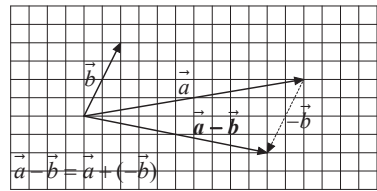
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Beispiel})$$



$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (\text{Beispiel})$$



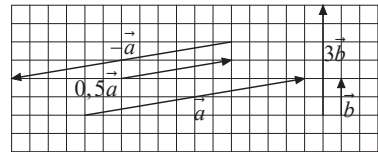
**Hinweis:** Grafisch wird bei der Subtraktion der Gegenvektor  $-\vec{b}$  addiert.

#### 2. Länge (Betrag) eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \quad \text{Beispiel: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ LE}$$

#### 3. S(kalare) – Multiplikation (Zahl · Vektor)

$$k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{Beispiel: } 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$



##### Bemerkungen

- Der Vektor  $k \cdot \vec{a}$  hat die  $|k|$ -fache Länge von  $\vec{a}$  und ist parallel zu  $\vec{a}$ .
- Der **Gegenvektor**  $-\vec{a}$  ist parallel und besitzt die gleiche Länge wie  $\vec{a}$ , ist jedoch entgegengesetzt gerichtet.

$$\text{Beispiel: } \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad -\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Ein **Einheitsvektor** ist ein Vektor, dessen **Länge 1** ist. Teilt man einen gegebenen Vektor durch seine Länge (Betrag), erhält man den zugehörigen Einheitsvektor.

$$\text{Beispiel: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ hat die Länge } |\vec{a}| = 5; \quad \text{Einheitsvektor: } \vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ -0,8 \end{pmatrix}$$

