



# Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

## Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

---

Der Verfasser:



**Stefan Rosner**

Lehrer an der Kaufm. Schule in Schwäbisch Hall

stefan\_rosner@hotmail.com

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Coverbild (Joker): © fotomaedchen - Fotolia.com

\* \* \* \* \*

7. Auflage 2022

© 2016 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: [info@merkur-verlag.de](mailto:info@merkur-verlag.de)

[lehrer-service@merkur-verlag.de](mailto:lehrer-service@merkur-verlag.de)

Internet: [www.merkur-verlag.de](http://www.merkur-verlag.de)

Merkur-Nr. 0383-07

ISBN 978-3-8120-1068-0

## 2. Gleichungen

### 2.1 Gleichungstypen: Übersicht

	Typ 1	Typ 1S
<b>Gleichung 1. Grades</b> (linear) (S. 26)	$2x - 4 = 0$	
<b>Gleichung 2. Grades</b> (quadratisch) (S. 26)	$2x^2 - 4 = 0$	
<b>Gleichung 3. Grades</b> (S. 26)	$2x^3 - 4 = 0$	
<b>Gleichung 4. Grades</b> (S. 27)	$2x^4 - 4 = 0$	
<b>Exponentialgleichung</b> (S. 27)	$e^x = 0,5$ oder $e^{2x-1} = 0,5$	
<b>Sinusgleichung</b> (S. 30)	$\sin(x) = 0,5$	$\sin(2x - 1) = 0,5$
<b>Kosinusgleichung</b> (S. 30)	$\cos(x) = 0,5$	$\cos(2x - 1) = 0,5$
<b>Merkmal</b>	umformbar auf $\left\{ \begin{array}{c} x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ e^x \text{ oder } e^{\text{„nicht nur } x\text{“}} \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{array} \right\} = \dots$	umformbar auf $\left\{ \begin{array}{c} \sin(\text{„nicht nur } x\text{“}) \\ \cos(\text{„nicht nur } x\text{“}) \end{array} \right\} = \dots$
<b>Lösungsvorgehen</b>	<b>Gegenoperation</b> $\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{\quad} \\ \sqrt[3]{\quad} \\ \sqrt[4]{\quad} \\ \ln \\ \sin^{-1} \\ \cos^{-1} \end{array} \right\}$	<b>Substitution :</b> $u = \text{„nicht nur } x\text{“}$ führt zu $\left\{ \begin{array}{c} \sin(u) \\ \cos(u) \end{array} \right\} = \dots;$ Trig. Gleichung vom Typ 1 lösen; <b>Rücksubstitution</b>

**Abkürzung:** ... steht für eine Zahl.

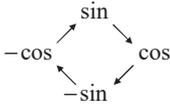


Typ 2	Typ 3	Typ S
$2x^2 - 4x = 0$	$x^2 - 8x + 15 = 0$	
$2x^3 - 4x = 0$		
$2x^4 - 4x = 0$		$x^4 - 8x^2 + 15 = 0$
$2e^{2x} - e^x = 0$		$e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$
$(\sin(x))^2 - 0,5 \sin(x) = 0$		
$(\cos(x))^2 - 0,5 \cos(x) = 0$		
<p>Alle Summanden enthalten mindestens <math>x</math> (bzw. <math>e^x / \sin(x) / \cos(x)</math>). Kein Summand besteht nur aus einer „Zahl“. Somit kann „etwas mit <math>x</math>“ ausgeklammert werden.</p>	<p>umformbar auf <math>\dots x^2 + \dots x + \dots = 0</math></p>	<p>umformbar auf <math>\left\{ \begin{array}{l} \dots x^4 + \dots x^2 + \dots \\ \dots e^{2x} + \dots e^x + \dots \end{array} \right\} = 0</math></p>
<p>(evtl.) Ausklammern; <b>Satz vom Nullprodukt</b> (S. 32)</p>	<p><b>abc- bzw. pq-Formel</b></p>	<p><b>Substitution führt zu</b> <math>\dots u^2 + \dots u + \dots = 0</math>; abc- bzw. pq-Formel; <b>Rücksubstitution</b></p>

**Bemerkung:** Eine Gleichung, die keinem dieser Gleichungstypen zuordenbar ist, kann in der Regel nicht „von Hand“ gelöst werden.

### 3. Differenzialrechnung

#### 3.1 Ableitungsregeln

Nr.	Beispiel	Vorgehen
<b>Elementarregeln</b>		
1	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$  $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x \quad (= 2 \cdot x^1)$  $f(x) = x \quad (= x^1)$ $f'(x) = 1 \quad (\downarrow = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1)$	$f(x) = x^{\text{Exponent}}$ $f'(x) = \text{Exponent} \cdot x^{\text{Exponent}-1}$ (Potenzregel)
2	$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$	Abschreiben
3	$f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$	 <p>(Im Uhrzeigersinn!)</p>
4	$f(x) = \cos(x)$ $f'(x) = -\sin(x)$	
<b>Vorgehensregeln</b>		
5	$f(x) = 3 \cdot x^2$ $f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$	„Zahlen“ mit $\cdot$ oder $:$ „bleiben“ (Faktorregel)
6	$f(x) = x^2 + 2$ $f'(x) = 2x$	„Zahlen“ mit $+$ oder $-$ „verschwinden“
7	$f(x) = x^2 - 4x$ $f'(x) = 2x - 4$	$+$ und $-$ Zeichen unterteilen die Funktion in Teilfunktionen, welche einzeln abgeleitet werden (Summenregel)



Nr.	Beispiel	Vorgehen
<b>Produktregel</b>		
<b>8</b>	$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ <i>Ableiten · Abschreiben + Abschreiben · Ableiten</i>

**Aber:** Die Produktregel nur dann anwenden, wenn zwei Faktoren, die **beide x** enthalten, miteinander **multipliziert** werden.

$$f(x) = 3x + \sin(x)$$

$$f'(x) = 3 + \cos(x)$$

(Keine Produktregel,  
da keine Multiplikation)

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$$

$$f'(x) = 3 \cdot \cos(x)$$

(Produktregel unnötig,  
Faktor 3 enthält kein x)

$$f(x) = 3x \cdot \sin(x)$$

$$f'(x) = 3 \cdot \sin(x) + 3x \cdot \cos(x)$$

(Produktregel)

<b>Anwendungen der Kettenregel</b>		
<b>9</b>	$f(x) = (2x+3)^5$ $f'(x) = 5 \cdot (2x+3)^4 \cdot 2$ $= 10 \cdot (2x+3)^4$	$f(x) = (\text{Klammerinhalt})^{\text{Exponent}}$ $f'(x) = \text{Exponent} \cdot (\text{Klammerinhalt})^{\text{Exponent}-1} \cdot \text{Klammerinhalt abgeleitet}$
<b>10</b>	$f(x) = e^{2x+3}$ $f'(x) = e^{2x+3} \cdot 2$	$f(x) = e^{\text{Exponent}}$ $f'(x) = e^{\text{Exponent}} \cdot \text{Exponent abgeleitet}$
<b>11</b>	$f(x) = \sin(2x+3)$ $f'(x) = \cos(2x+3) \cdot 2$	$f(x) = \sin(\text{Klammerinhalt})$ $f'(x) = \cos(\text{Klammerinhalt}) \cdot \text{Klammerinhalt abgeleitet}$
<b>12</b>	$f(x) = \cos(2x+3)$ $f'(x) = -\sin(2x+3) \cdot 2$	$f(x) = \cos(\text{Klammerinhalt})$ $f'(x) = -\sin(\text{Klammerinhalt}) \cdot \text{Klammerinhalt abgeleitet}$

Die allgemeine Kettenregel, aus welcher sich die Regeln 9-12 ergeben, lautet:

$$f(x) = u(v(x))$$

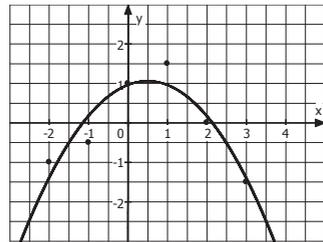
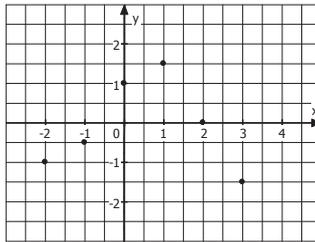
$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

*Äußere Ableitung · Innere Ableitung*

## 2. Möglichkeit: Regression

### Beispiel:

Gesucht ist die Gleichung einer Parabel (2. Grades), deren Schaubild näherungsweise durch die dargestellten Punkte verläuft.



CASIO fx-87DE X	TI-30X Plus MultiView
[MENU]	[data]
[3]	L1(1)=
[3]	Koordinaten aller Punkte eintragen;
Koordinaten aller Punkte eintragen;	[2nd]; [mode]
[AC]	[2nd]; [data]
[OPTN];	[↓]; [↓]; [↓]; [↓]
[3]	[enter]
Achtung: Der CASIO-WTR geht von $y = a + bx + cx^2$ aus!	[↓]; [↓]; [↓]; [→]; [↓]; [enter]

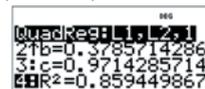
Gleichung der Regressionsfunktion:  $f(x) = -0,393x^2 + 0,379x + 0,971$

**Notwendig:** Mindestens so viele Punkte wie unbekannte Koeffizienten im Ansatz.

### Das Bestimmtheitsmaß $r^2$

- Gibt die **Güte einer Regression** an, beurteilt also, wie „genau“ die Kurve durch die Punkte verläuft.
- $r^2$  kann hierbei Werte zwischen 0 (Kurve „passt nicht“ zur Punktwolke) und 1 (Kurve verläuft durch alle Punkte) annehmen.

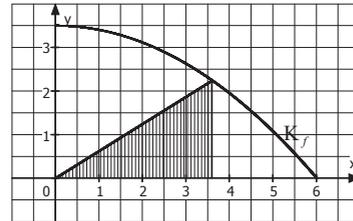
Im Beispiel gilt  $r^2 \approx 0,86$ , was auf eine „recht hohe“ Anpassung der Kurve an die Punkte hindeutet.



### 3.11 Extremwertaufgaben

#### Beispiel

Aus einer parabelförmigen Holzplatte soll ein möglichst großes Dreieck (s. Skizze, mit rechtem Winkel rechts unten) herausgesägt werden.  
 Der Rand der Holzplatte wird durch das Schaubild der Funktion  $f$  mit  $f(x) = -\frac{7}{72}x^2 + \frac{7}{2}$  beschrieben.  
 Welchen Flächeninhalt kann ein solches Dreieck höchstens haben?



<b>Das Rezept</b>	
<b>Zutaten</b>	
<b>1. Skizze machen:</b> Alles einzeichnen was in der Aufgabenstellung beschrieben wird.	(hier gegeben)
<b>2. Koordinaten möglichst vieler relevanter Punkte (eventuell in Abhängigkeit von <math>u</math>) angeben.</b> Hierbei beachten: Ein Punkt, der „irgendwo auf dem Schaubild“ liegt, besitzt die Koordinaten $(u   f(u))$ .	
<b>Kochen</b>	
<b>3. Allgemeine Zielfunktion bestimmen.</b> Formel für die Größe suchen, die maximal (bzw. minimal) werden soll. (z.B. $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ ; $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ ; $A = a \cdot b$ ; $U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ ; ...)	Flächeninhalt rechtwinkliges Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \quad (\text{Allgemeine Zielfunktion})$
<b>4. Benötigte Strecken (<math>a, b, c, h_c, \dots</math>) für Allgemeine Zielfunktion in Skizze einzeichnen.</b>	



<p><b>5. Konkrete Zielfunktion bestimmen.</b>  <b>Streckenlängen</b> durch die Koordinaten der Punkte aus 2. <b>ausdrücken.</b>          Hierbei beachten:          - waagr. Streckenlänge: <math>x_{\text{rechts}} - x_{\text{links}}</math>          - senkr. Streckenlänge: <math>y_{\text{oben}} - y_{\text{unten}}</math>  <b>Funktionsterm</b> aus Aufgabenstellung <b>einsetzen.</b></p>	$A(u) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ $A(u) = \frac{1}{2} \cdot (u-0) \cdot (f(u)-0)$ $A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(-\frac{7}{72}u^2 + \frac{7}{2} - 0\right)$ <p>(Konkrete Zielfunktion)</p>
<p><b>6. Schaubild der Konkreten Zielfunktion auf Hochpunkt</b> (bzw. Tiefpunkt) <b>untersuchen.</b></p>	$A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(-\frac{7}{72}u^2 + \frac{7}{2}\right) = -\frac{7}{144}u^3 + \frac{7}{4}u;$ $A'(u) = -\frac{7}{48}u^2 + \frac{7}{4}; A''(u) = -\frac{7}{24}u$ <p>1. <math>A'(u) = 0: -\frac{7}{48}u^2 + \frac{7}{4} = 0</math>          Lösung: <math>u_1 \approx 3,46</math> (<math>u_2 \approx -3,46</math> nicht in D)</p> <p>2. <math>A''(3,46) \approx -\frac{7}{24} \cdot 3,46 &lt; 0 \rightarrow H</math></p> <p>3. <math>A(3,46) \approx -\frac{7}{144} \cdot 3,46^3 + \frac{7}{4} \cdot 3,46 \approx 4,04</math>  <math>\rightarrow H(3,46   4,04)</math></p>
<p><b>7. Randwertuntersuchung Grenzen des Definitionsbereiches</b> für <math>u</math> in Konkrete Zielfunktion <b>einsetzen.</b>          Erhaltene <math>y</math>-Werte mit dem <math>y</math>-Wert des Hochpunktes (bzw. Tiefpunktes) <b>vergleichen.</b></p>	<p>Definitionsbereich: <math>D = [0; 6]</math> (s. Skizze)</p> $A(0) = 0 < 4,04$ $A(6) = 0 < 4,04$
<p><b>Servieren</b></p>	
<p><b>8. Antwortsatz</b>          Für <math>u = \dots</math> (<math>x</math>-Wert Extrempunkt) wird <math>\dots</math> (gesuchte Größe) maximal (bzw. minimal).          Diese beträgt dann <math>\dots</math> (<math>y</math>-Wert Extrempunkt).</p>	<p><b>Antwortsatz</b>          Für <math>u \approx 3,46</math> wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal.          Dieser beträgt dann ungefähr 4,04 Flächeneinheiten.</p>

## 5.2 Von der Aufgabenformulierung zum Rechenansatz („Schlüsselwörter“)

Da sich anwendungsorientierte Aufgaben auf alle Inhalte der Analysis beziehen können, ist es oftmals schwierig, von der Aufgabenformulierung zum zugehörigen Rechenansatz zu gelangen. Die nachfolgende Zusammenstellung soll Ihnen dabei helfen.

Aufgabenformulierung	Rechenansatz
Bestand zum Beobachtungsbeginn; Anfangsbestand; Startwert; ...	$f(0)$
Bestand bzw. Wert zu einem bestimmten Zeitpunkt; ...	gegebenen Zeitpunkt einsetzen: $f(x_0)$
Ab welchem bzw. bis zu welchem Zeitpunkt liegt mehr bzw. weniger als ein bestimmter Bestand vor; ein bestimmter Wert wird über- bzw. unterschritten; höher bzw. geringer als; ...	$f(x) = \text{Wert}$ (gleichsetzen um zum Anfangs- bzw. Endzeitpunkt zu gelangen)
Momentane Änderungsrate; Änderung zu einem Zeitpunkt; steil bzw. flach; Steigung; ...	$f'(x)$ bzw. $f'(x_0)$
kleinster (geringster) bzw. größter (höchster) Wert; ...	Hoch- oder Tiefpunkt von $K_f$
größte Änderung; stärkster Zuwachs bzw. stärkste Abnahme; steilste Stelle; ...	Wendepunkt von $K_f$ bzw. Hoch oder Tiefpunkt von $K_{f'}$
Winkel; Steigungswinkel; ...	$\tan \alpha = m$
Größter bzw. kleinster Flächeninhalt, Volumen, Abstand, Länge, ...	Extremwertaufgabe
Langfristig, über sehr langen Zeitraum; Grenzwert; ... (bei $e$ -Funktion)	Asymptote
gesamt; insgesamt; ...	$\int_a^b f(x) dx$
mittlerer; durchschnittlicher; ...	$\bar{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b (f(x)) dx$
Volumen	$V_{rot} = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$



## 2. Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel

### 2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Formel (allg.)

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

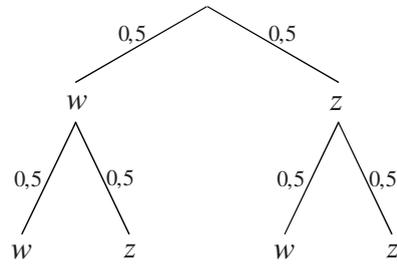
A: Gesuchtes Ereignis  
 B: Vorwissen bzw. Bedingung  
 $\cap$ : „und“

Formel (in Worten)

$$P_{\text{Vorwissen}}(\text{gesucht}) = \frac{P(\text{entspricht Vorwissen und ist gesucht})}{P(\text{möglich laut Vorwissen})}$$

**Beispiel 1:** Eine Münze wird 2-mal geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, wobei bekannt ist, dass im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.



$$P_{\text{Wappen im 2. Wurf}}(\text{genau ein Mal Zahl}) = \frac{P(\text{Wappen im 2. Wurf und genau ein Mal Zahl})}{P(\text{Wappen im 2. Wurf})}$$

$$= \frac{P(zw)}{P(zw) + P(wz)} = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5} = \frac{0,25}{0,5} = 0,5 = 50\%$$

**Beispiel 2:** An einer Schule werden Schüler nach der Marke ihres Smartphones befragt:

Marke	Samsung	Apple	Sony	HTC	sonst
Anteil	45 %	21 %	8 %	6 %	20 %

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Schüler, von welchem bekannt ist, dass er kein Smartphone von Samsung besitzt, ein Smartphone von HTC?

$$P_{\text{kein Samsung}}(\text{HTC}) = \frac{P(\text{kein Samsung und HTC})}{P(\text{kein Samsung})} = \frac{P(\text{HTC})}{P(\text{kein Samsung})}$$

$$= \frac{0,06}{1 - 0,45} = \frac{0,06}{0,55} \approx 0,109 = 10,9\%$$



## Wichtige Hinweise

### Erkennen, dass eine Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit vorliegt

Die Schwierigkeit bei Aufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit besteht oftmals darin, diese überhaupt als solche zu entlarven und nicht mit „üblichen Baumaufgaben“ zu verwechseln. Hierbei muss das Merkmal solcher Aufgaben, nämlich die Existenz von Vorwissen, erkannt werden.

Es gibt mehrere **grammatikalische Formulierungen**, die den Aufgabenbearbeiter über vorhandenes Vorwissen informieren sollen.

**Beispiel** (siehe Vorseite)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass <sup>gesuchtes Ereignis</sup> genau ein Mal Zahl geworfen wird, **wobei bekannt ist, dass** <sup>Vorwissen (Bedingung)</sup> im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

**grammatikalische Formulierung**

### Weitere grammatikalische Formulierungen für die bedingte Wahrscheinlichkeit

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, **wenn man weiß, dass** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, **falls** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, **wenn** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

Im zweiten Wurf wird Wappen geworfen. (**Vorwissen in eigenem Satz.**)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird.

### Achtung: Keine bedingte Wahrscheinlichkeit bei Formulierungen mit „und“

Formulierungen mit „und“ deuten auf eine Aufgabenstellung ohne eine bedingte Wahrscheinlichkeit hin.

**Beispiel:** Eine Münze wird 2-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl **und** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

$$P(zw) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

## 1.2 Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung

**Beispiel:** Ein Basketballspieler trifft erfahrungsgemäß einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal. Die Zufallsvariable  $X$  gibt die Anzahl der Treffer an.

Die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  einen bestimmten Wert annimmt, kann mit Hilfe der Bernoulliformel (mit  $n = 8$  und  $p = 0,75$ ) berechnet werden. Somit ist die Zufallsvariable  $X$  binomial verteilt.

### 1. Die Binomialverteilung (genau $k$ Treffer; $P(X = k)$ )

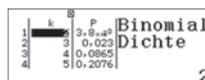
eine „Liste“, in welcher für jeden möglichen Wert der Zufallsvariablen die **zugehörige Wahrscheinlichkeit** steht.

Beispiel:  $P(X = 4) \approx 0,0865$

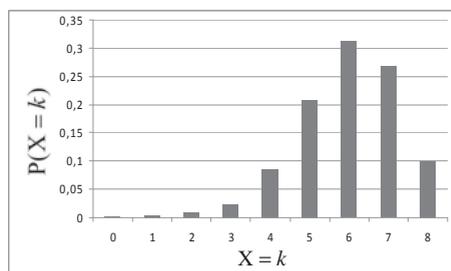
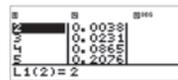
Die Wahrscheinlichkeit für **genau 4** Treffer beträgt ca. 8,65 %.

$$\left( \begin{array}{l} \text{Berechnung mit Bernoulliformel:} \\ P(X = 4) = \binom{8}{4} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^4 \approx 0,0865 \end{array} \right)$$

CASIO



TI



### 2. Die kumulierte Binomialverteilung (höchstens $k$ Treffer; $P(X \leq k)$ )

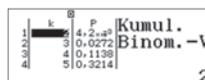
eine „Liste“, in welcher für jeden möglichen Wert der Zufallsvariablen die **Wahrscheinlichkeit** steht, dass **dieser oder ein geringerer Wert als dieser (höchstens dieser)** angenommen wird.

Beispiel:  $P(X \leq 4) \approx 0,1138$

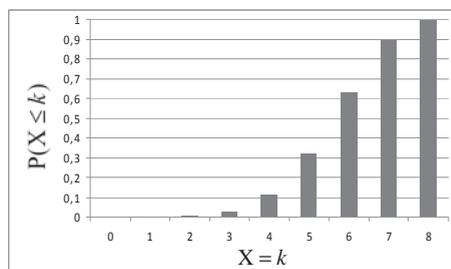
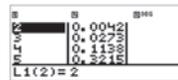
Die Wahrscheinlichkeit für 0 bis 4 Treffer (**höchstens 4** Treffer) beträgt ca. 11,38 %.

$$\left( \begin{array}{l} \text{Berechnung:} \\ P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 4) \end{array} \right)$$

CASIO



TI



### 3. Wahrscheinlichkeit für mindestens $k$ Treffer $P(X \geq k)$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Spieler 4 bis 8 Mal (also **mindestens 4** Mal)?

Vorgehen mithilfe des **Gegenereignisses** „3 oder weniger Treffer (höchst. 3 Treffer)“ und der **kumulierten Verteilung**:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0,0273 = 0,9727$$



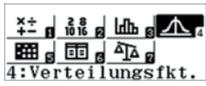
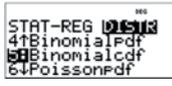
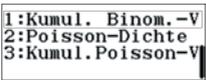
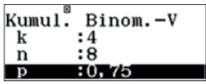
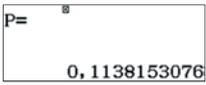
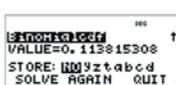
### 1.4 Aufgabentypen zur Binomialverteilung (mit WTR)

<b>Aufgabentypen</b> $(n = 8; p = 0,75)$	<b>Beispiel 1:</b> Ein Basketballspieler trifft einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ...
<b>1. „genau <math>k</math> Treffer“</b> $P(X = k)$	a) ... genau 4 Treffer? $P(X = 4) \approx 0,0865$
<b>2. „höchstens <math>k</math> Treffer“</b> $P(X \leq k)$	b) ... höchstens 4 Treffer“? $P(X \leq 4) \approx 0,1138$
<b>3. „mindestens <math>k</math> Treffer“</b> $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$	c) ... mindestens 4 Treffer? $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0,0273 \approx 0,9727$ ↓ (Gegenereignis: „Höchstens 3 Treffer“)
<b>4. „mindestens <math>k</math> und höchstens“ <math>h</math> Treffer“</b> $P(k \leq X \leq h)$ $= P(X \leq h) - P(X \leq k - 1)$	d) ... mindestens 4 und höchstens 7 Treffer? $P(4 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3)$ $\approx 0,8999 - 0,0273 \approx 0,8726$

1. Aufgabentyp mit Binomialverteilung  $P(X = k)$

2., 3. und 4. Aufgabentyp mit kumulierter Binomialverteilung  $P(X \leq k)$

Eingabe in WTR (Beispiel: 2. Aufgabentyp:  $n = 8; p = 0,75; P(X \leq 4)$ )

CASIO FX-87DE X	TI-30X Plus MultiView
 <p>1:Normal-Dichte 2:Kumul. Normal-V 3:Inv. Normal-V. 4:Binomial-Dichte</p>	 <p>4:BinomialPdf 5:Binomialcdf 6:PoissionPdf</p>
 <p>1:Kumul. Binom.-V 2:Poisson-Dichte 3:Kumul. Poisson-V</p>	 <p>Binomialcdf X: SINGLE LIST ALL</p>
 <p>Kumul. Binom.-V k : 4 n : 8 p : 0,75</p>	 <p>Binomialcdf TRIALS=8 P(SUCCESS)=0,75 1=4 CALC</p>
 <p>P= 0,1138153076</p>	 <p>Binomialcdf VALUE=0,113815308 STORE: 003zabcd SOLVE AGAIN QUIT</p>

**Hinweis:** Durch „Liste“ / „List“ erhält man die Wahrscheinlichkeiten zu mehreren Werten.



### 3.4 Zyklische Populationsprozesse

**Beispiel 1:** Bei einer Insektenart entwickeln sich innerhalb eines Monats 25 % der vorhandenen Eiern zu Larven. Nach einem weiteren Monat haben sich 40 % der vorhandenen Larven zu Insekten entwickelt. Im nachfolgenden Monat legt jedes Insekt 10 Eier und stirbt kurz danach.

#### Darstellungsmöglichkeiten

Diagramm	Tabelle	Übergangsmatrix																
	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>von E</th> <th>von L</th> <th>von I</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>nach E</th> <td>0</td> <td>0</td> <td>10</td> </tr> <tr> <th>nach L</th> <td>0,25</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <th>nach I</th> <td>0</td> <td>0,4</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		von E	von L	von I	nach E	0	0	10	nach L	0,25	0	0	nach I	0	0,4	0	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{allg.})$ <p><math>a_1, a_2</math>: <b>proz. Überlebensrate / Überlebenswahrsch.</b>  <math>v</math>: <b>Vermehrungsrate</b></p>
	von E	von L	von I															
nach E	0	0	10															
nach L	0,25	0	0															
nach I	0	0,4	0															

**Unterschied** zum Stochastischen Übergangsprozess (S. 128):

**Gesamtzahl** an beteiligten Objekten **verändert sich** von Zustand zu Zustand.

Übergangsmatrix enthält **nicht nur Wahrscheinlichkeiten** (keine stochastische Matrix).

**Formel:**  $\vec{x}_{\text{neu}} = A \cdot \vec{x}_{\text{alt}}$  bzw.  $A \cdot \vec{x}_{\text{alt}} = \vec{x}_{\text{neu}}$  (Reihenfolge je nach Aufgabenstellung)

#### Berechnung der Entwicklung

$$\vec{x}_0 \text{ (Anfangszustand)}$$

$$\vec{x}_1 = A \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = A \cdot A \cdot \vec{x}_0 = A^2 \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{x}_3 = A \cdot \vec{x}_2 = A^3 \cdot \vec{x}_0$$

...

#### Abkürzungen

- $\vec{x}_{\dots}$ : Anzahl im Zeitschritt ...
- A: Übergangsmatrix von einem Zeitschritt zum nächsten
- $A^2$ : Übergangsmatrix von einem Zeitschritt zum übernächsten
- ...

**Hinweis: Gleiche Formel(n) wie bei stoch. Übergangsprozessen!**



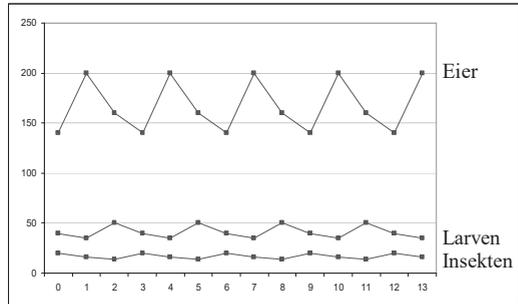
### Entwicklung der Population

**Im Beispiel:** Zu Beginn sind 140 Eier, 40 Larven und 20 Insekten vorhanden.

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 140 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}; \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 35 \\ 16 \end{pmatrix}; \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 160 \\ 50 \\ 14 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 140 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}; \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 200 \\ 35 \\ 16 \end{pmatrix}; \vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 160 \\ 50 \\ 14 \end{pmatrix}; \dots$$

Die Population entwickelt sich zyklisch. Nach einem Zyklus von 3 Monaten ist stets die Startpopulation wieder vorhanden.

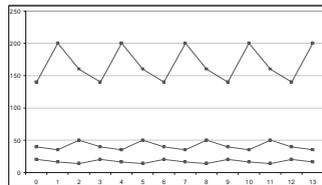


### Entwicklung bei verschiedenen Vermehrungsraten (v)

Pro Insekt 10 Eier (s. o.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(0,25 \cdot 0,4 \cdot 10 = 1)$$

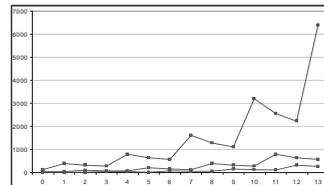


**Zyklische Entwicklung**  
(Zyklus: 3 Monate)

Pro Insekt 20 Eier

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(0,25 \cdot 0,4 \cdot 20 = 2 > 1)$$

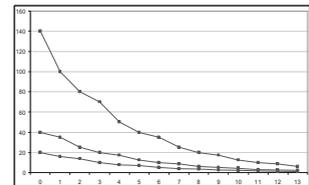


**Population wächst an**

Pro Insekt 5 Eier

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(0,25 \cdot 0,4 \cdot 5 = 0,5 < 1)$$



**Population stirbt aus**

### Ergebnis

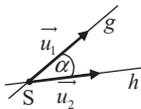
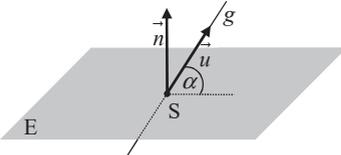
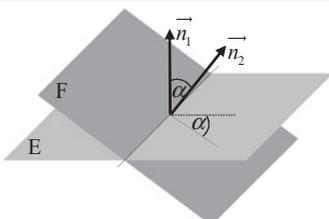
Bei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$ , falls:  $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 \cdot v > 1 & \text{wächst die Population an} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot v = 1 & \text{zyklische Entwicklung (Zyklus: 3 Zeitschritte)} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot v < 1 & \text{stirbt die Population aus} \end{cases}$

• Gilt (z.B.)  $a \cdot b \cdot v = 2$  **verdoppelt** sich, gilt  $a \cdot b \cdot v = 0,5$  **halbiert** sich die Population stets nach 3 Zeitschritten.

• Bei einem zyklischen Prozess mit 3 Zuständen gilt :  $A^3 = E$ .

• Bei (z. B.) einem Prozess mit 4 möglichen **Zuständen** (Format von A:  $(4 \times 4)$ ) finden die Entwicklungen auch stets in **4 Zeitschritten** statt.

## 5. Schnittwinkel

Zwischen	Formel	senkrecht ( $\alpha = 90^\circ$ )
<b>Vektor <math>\vec{a}</math> und Vektor <math>\vec{b}</math></b> 	$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} }$	falls $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
<b>Gerade <math>g</math> mit Richtungsvektor <math>\vec{u}_1</math> und Gerade <math>h</math> mit Richtungsvektor <math>\vec{u}_2</math></b> 	$\cos(\alpha) = \frac{ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 }{ \vec{u}_1  \cdot  \vec{u}_2 }$	falls $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$
<b>Gerade <math>g</math> mit Richtungsvektor <math>\vec{u}</math> und Ebene <math>E</math> mit Normalenvektor <math>\vec{n}</math></b> 	$\sin(\alpha) = \frac{ \vec{u} \cdot \vec{n} }{ \vec{u}  \cdot  \vec{n} }$	falls $\vec{u} = k \cdot \vec{n}$ (mit $k \in \mathbb{R}$ ) (Vielfache)
<b>Ebene <math>E</math> mit Normalenvektor <math>\vec{n}_1</math> und Ebene <math>F</math> mit Normalenvektor <math>\vec{n}_2</math></b> 	$\cos(\alpha) = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1  \cdot  \vec{n}_2 }$	falls $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

**Beispiel:** Schnittwinkel zwischen  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $E: x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3$ .

$$\sin(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|4 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}} \Rightarrow \alpha \approx 27,81^\circ$$

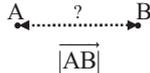
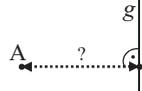
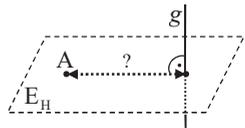
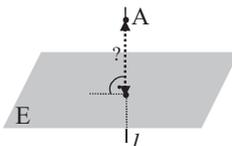
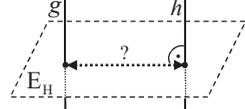
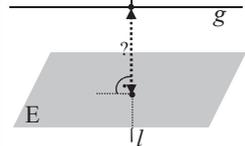
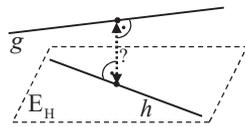
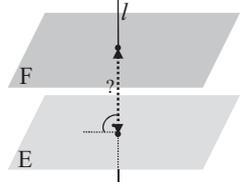
(WTR-Einstellung: deg)

**Hinweis:** Mit dem Schnittwinkel ist stets der spitze Winkel ( $0 \leq \alpha \leq 90$ ) gemeint.



## 6. Abstandsberechnungen

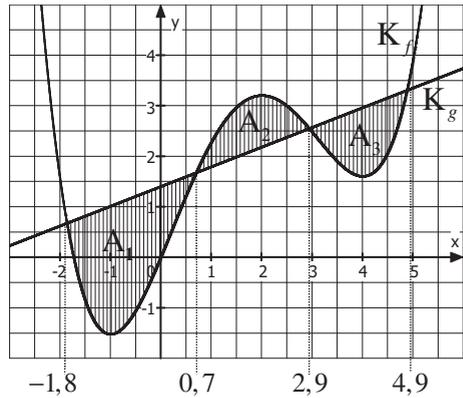
Lösungsstrategien im Überblick (ausführliches Vorgehen auf den folgenden Seiten)

	Punkt	Gerade	Ebene
Punkt	<p><b>Betrag</b></p>  <p><math> \overrightarrow{AB} </math></p> <p>(S. 163)</p>	<p><b>1. Skalarprodukt</b></p>  <p><b>2. Hilfsebene</b></p>  <p>(S. 163)</p>	<p><b>1. Formel</b></p> $d = \frac{ n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 - b }{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \left  \frac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{ \vec{n} } \right $ <p><b>2. Lotgerade</b></p>  <p>(S. 165)</p>
Gerade		<p><b>1. Skalarprodukt</b></p> <p><b>2. Hilfsebene</b></p>  <p>(S. 166)</p>	<p><b>1. Formel (Punkt-Ebene)</b></p> <p><b>2. Lotgerade</b></p>  <p>(S. 167)</p>
	<p><b>1. Formel</b></p> $d = \left  \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{ \vec{n} } \right  \text{ mit } \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ <p><b>2. Hilfsebene</b></p>  <p>(S. 166)</p>		
Ebene			<p><b>1. Formel (Punkt-Ebene)</b></p> <p><b>2. Lotgerade</b></p>  <p>(S. 167)</p>



**Aufgabe 39**

Die Schaubilder der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  schließen drei Flächen mit den Inhalten  $A_1 = 4,1$  FE,  $A_2 = 1,5$  FE und  $A_3 = 1,7$  FE ein. Geben Sie zu jedem der nachfolgenden Flächenberechnungsansätze das zugehörige Ergebnis an.



Flächenberechnungsansatz	Ergebnis
a) $\int_{0,7}^{2,9} (f(x) - g(x)) dx$	_____
b) $\int_{2,9}^{4,9} (f(x) - g(x)) dx$	_____
c) $\int_{-1,8}^{2,9} (f(x) - g(x)) dx$	_____
d) $\int_{-1,8}^{4,9} (g(x) - f(x)) dx$	_____
e) $\int_{-1,8}^{0,7} (g(x) - f(x)) dx + \int_{0,7}^{2,9} (f(x) - g(x)) dx + \int_{2,9}^{4,9} (g(x) - f(x)) dx$	_____
f) $\int_{-1,8}^{2,9} g(x) - f(x) dx$	_____
g) $\int_{4,9}^{2,9} (g(x) - f(x)) dx$	_____

**Von Schnittstelle zu Schnittstelle integrieren!**

Ansonsten werden positive und negative Flächeninhaltswerte zu einer „Flächenbilanz“ verrechnet.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & 2x^4 - 24x^2 = -72 + 2x^2 \quad | +72 - 2x^2 \\ & 2x^4 - 26x^2 + 72 = 0 \quad | :2 \\ & x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \end{aligned}$$

Substitution:  $(x^4 = u^2; x^2 = u)$

$$\begin{aligned} & u^2 - 13u + 36 = 0 \\ u_{1/2} &= \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} \quad (\text{abc-Formel}) \\ &= \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \\ u_1 &= \frac{13+5}{2} = \frac{18}{2} = 9; \quad u_2 = \frac{13-5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} x^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad} \quad & x^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad} \\ x_1 = 3 \quad & x_3 = 2 \\ x_2 = -3 \quad & x_4 = -2 \end{aligned}$$

(Typ S; 4. Grad)

$$\text{j)} \quad 2e^{2x} - 17e^x + 8 = 0$$

Substitution:  $(e^{2x} = u^2; e^x = u)$

$$\begin{aligned} & 2u^2 - 17u + 8 = 0 \\ u_{1/2} &= \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} \quad (\text{abc-Formel}) \\ &= \frac{17 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{17 \pm 15}{4} \\ u_1 &= \frac{17+15}{4} = \frac{32}{4} = 8; \quad u_2 = \frac{17-15}{4} = \frac{2}{4} = 0,5 \end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} e^x = 8 \quad | \ln \quad & e^x = 0,5 \quad | \ln \\ x_1 = \ln(8) \quad & x_2 = \ln(0,5) \\ x_1 \approx 2,08 \quad & x_2 \approx -0,69 \end{aligned}$$

(Typ S; Exponentialgleichung)

$$\begin{aligned} \text{k)} \quad & (\sin(x))^2 = 2 \sin(x) \quad | -2 \sin(x) \\ & (\sin(x))^2 - 2 \sin(x) = 0 \\ & \sin(x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0 \end{aligned}$$

S. v. Nullpr.

$$\begin{aligned} \sin(x) = 0 \quad | \sin^{-1} \quad & \sin(x) - 2 = 0 \quad | +2 \\ x = \sin^{-1}(0) \quad & \sin(x) = 2 \\ x_1 = 0 \quad (\text{Merkhilfe oder WTR}) \quad & \text{keine Lösung} \\ x_2 = \pi - 0 = \pi \\ \text{alle Lösungen:} \\ x = 0 + k \cdot 2\pi \\ x = \pi + k \cdot 2\pi \quad (k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Lösungen im Bereich  $[-2; 8]$ :

$$\begin{aligned} & 0; \\ & 2\pi (= 0 + 1 \cdot 2\pi); \\ & \pi \quad (\text{Typ 2; Sinusgleichung}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l)} \quad & 2e^{2x} - e^x = 2e^x \quad | -2e^x \\ & 2e^{2x} - 3e^x = 0 \\ & e^x \cdot (2e^x - 3) = 0 \end{aligned}$$

S. v. Nullpr.

$$\begin{aligned} e^x = 0 \quad | \ln \quad & 2e^x - 3 = 0 \quad | +3 \\ \text{keine Lösung} \quad & 2e^x = 3 \quad | :2 \\ & e^x = 1,5 \quad | \ln \\ & x = \ln(1,5) \\ & x \approx 0,405 \end{aligned}$$

(Typ 2; Exponentialgleichung)

$$\begin{aligned} \text{m)} \quad & 2x(x^2 - 1) = 0,5 - 2x \\ & 2x^3 - 2x = 0,5 - 2x \quad | +2x \\ & 2x^3 = 0,5 \quad | :2 \\ & x^3 = 0,25 \quad | \sqrt[3]{\quad} \\ & x = \sqrt[3]{0,25} \\ & x \approx 0,63 \end{aligned}$$

(Typ 1; 3. Grad)

$$\text{n)} \quad (e^x - 1) \cdot (1 - 2x^3) = 0$$

S. v. Nullpr.

$$\begin{aligned} e^x - 1 = 0 \quad | +1 \quad & 1 - 2x^3 = 0 \quad | +2x^3 \\ e^x = 1 \quad | \ln \quad & 1 = 2x^3 \quad | :2 \\ x_1 = 0 \quad & 0,5 = x^3 \quad | \sqrt[3]{\quad} \\ & \sqrt[3]{0,5} = x_2 \\ & 0,79 \approx x_2 \end{aligned}$$

(Typ 2; gemischt)