Ott
Lengersdorf

Abitur 2025 | *Leistungskurs*

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung Mathematik am Berufskolleg – Berufliches Gymnasium

– Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung –

Nordrhein-Westfalen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Oberstudienrat

Norbert Lengersdorf

Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

17. Auflage 2024

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0447-17
ISBN 978-3-8120-1128-0

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält nur auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2025 im Fach Mathematik an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung.

Die Aufgaben behandeln nur Themen, die in den Abiturvorgaben 2025 für den Leistungskurs Mathematik, Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung, aufgeführt sind.

Die zentrale Abiturprüfung 2025 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel (GTR bzw. CAS)

Die Aufgaben für den Leistungskurs sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra/Analytische Geometrie.

Durch die Vorgaben für die schriftliche Abiturprüfung 2025 werden inhaltliche Schwerpunkte festgelegt.

Die **Analysis** behandelt im Abitur 2025 als Schwerpunkt ganzrationale Funktionen und Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mithilfe dieser Funktionstypen: Marktpreistheorie, Modelle der vollständigen Konkurrenz und des Monopols, Absatz- und Umsatzentwicklung, Kosten- und Gewinnanalyse.

Die **Lineare Algebra** hat die Schwerpunkte Lineare Gleichungssysteme und **Lineare Optimierungsprobleme (neu in 2025)**. Mehrstufige Produktionsprozesse und stochastische Prozesse werden als Anwendungen behandelt.

Schwerpunkte in der **Stochastik** sind die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung, der einseitige Hypothesentest **(neu in 2025)** und ökonomische Anwendungen wie die Preiskalkulation.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben. An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2025

Leistungskurs

Die schriftliche Abiturprüfung umfasst den Aufgabenteil A (Bearbeitung ohne Hilfsmittel) und den Aufgabenteil B (Bearbeitung mit Hilfsmitteln).
Der Aufgabenteil A besteht aus **vier Pflichtaufgaben** und **vier Wahlaufgaben**, aus denen zwei von den Prüflingen ausgewählt werden.
Die Auswahlentscheidung wird dokumentiert, die beiden angekreuzten Wahlaufgaben werden bewertet.
Der Aufgabenteil B besteht aus drei Pflichtaufgaben.
Bei mindestens zwei der Aufgaben des Aufgabenteils A und B sind Anwendungsbezüge aus Wirtschaft und Verwaltung vorgesehen.

Aufgabenteil A **Bearbeitung ohne Hilfsmittel**				**Aufgabenteil B** **Bearbeitung mit Hilfsmittel**	
Pflichtaufgaben		Wahlaufgaben (zwei aus vier, beliebig)		Pflichtaufgaben	
Analysis	5	Analysis	5	Analysis	30
Analysis	5	Analysis	5	Stochastik	30
Stochastik	5	Stochastik	5	Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	30
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5	Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5		
Summe	20	Summe	10	Summe	90
Gesamtsumme: 120 BE + 5 BE (Darstellungsleistung) = **125 BE**					

Organisation

Zu Beginn der Bearbeitungszeit erhalten die Prüflinge die beiden zu bearbeitenden Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel (GTR oder CAS; Formelsammlung) werden noch nicht ausgegeben.
Die Prüflinge geben individuell nach Bearbeitung ihre Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhalten im Gegenzug Zugang zu den zugelassenen Hilfsmitteln (GTR oder CAS; Formelsammlung).
Die Arbeitszeit einschließlich Auswahlzeit beträgt 300 Minuten
Für Prüflinge, die die Aufgaben und die Lösungen des Prüfungsteils A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für den Prüfungsteil B.
Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

Operatoren und Dokumentation von Lösungen

1 Allgemeine Bemerkungen zu den Aufgabenstellungen

Der Prüfling wird nicht zur Nutzung einer bestimmten Technologie aufgefordert, da das Erkennen der Sinnhaftigkeit des Einsatzes des Taschenrechners eine selbstständige Leistung ist. Die Vorgehensweise und Darstellung der Lösung muss unabhängig von der gewählten Technik nachvollziehbar dokumentiert werden.
Der Schüler hat zu verdeutlichen, wie er mit welchen Eingaben mit der genutzten Technik zu welchen Ergebnissen gelangt ist. Die Dokumentation erfolgt immer mit mathematischen Regeln unter Nutzung der Fachsprache.

2 Beispiele zu einigen der häufig genutzten Operatoren

2.1

Operator	Beschreibung
Angeben, Nennen	Objekte, Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne nähere Erläuterungen bzw. Begründungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen

Erläuterungen: Der Prozess der Ergebnisermittlung bleibt gegebenenfalls im Dunkeln- somit auch die Wahl des Hilfsmittels. „Angeben /Nennen“ erfordert Einsicht in den Sachzusammenhang oder den mathematischen Zusammenhang.

Beispiel: ...und geben Sie eine mögliche Kostenfunktion an.

(Abitur 2017 LK CAS, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont:

Kostenfunktion z.B. mit c = 12: $K(x) = \frac{1}{400}x^3 - \frac{1}{15}x^2 + 12x + 200$

2.2

Operator	Beschreibung
Erläutern	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen

Erläuterungen: Beispielsweise kann zur Problemlösung ein Sachzusammenhang durch zusätzlich hergeleitete Informationen mit eigenen Worten dargelegt werden oder aber auch ein Vorgehen verständlich beschrieben werden.

Beispiel:

Erläutern Sie anhand der kurzfristigen und der langfristigen Preisuntergrenze, ob die Rasolux GmbH einen Preis von 700GE/ME unterbieten kann.

(Abitur 2017 GK Analysis 2.2.1)

Erwartungshorizont:

kPUG: Minimierung der variablen Stückkosten $k_v(x) = 10x^2 - 240x + 1920$

Notwendige und hinreichende Bedingung bei quadratischen Funktionen mit positivem Leitkoeffizient: $k'_v(x) = 0$ $\quad 20x - 240 = 0 \Leftrightarrow x = 12$ $\quad$ kPUG: $k_v(12) = 480$ (GE/ME)

LPUG: Minimierung der Stückkosten $k(x) = 10x^2 - 240x + 1920 + \frac{7840}{x}$

Darstellung des Graphen im Intervall von 0 bis 20 liefert den Tiefpunkt (14 | 1080)

LPUG 1080 GE/ME. Ein Preis von 700GE/ME kann kurzfristig, aber nicht langfristig unterschritten werden.

2.3

Operator	Beschreibung
Berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen

Erläuterungen: Der Ansatz, der auf der symbolischen Ebenen zur Lösung führt, ist zu dokumentieren. Der sich anschließende Lösungsweg muss unter Beibehaltung mathematischer Regeln nachvollziehbar dargestellt werden. Wenn ein GTR/CAS für einen Lösungsschritt verwendet wird, ist der Ansatz und der logische Schritt zu dokumentieren.

Beispiel: Berechnen Sie den maximalen Gewinn (Abitur 2017 LK GTR, Analysis 2.2.1.2)

Erwartungshorizont

Gewinnmaximum: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$

Ableitungen: $G'(x) = -3x^2 + 12x - 1{,}25$; $G''(x) = -6x + 12$

Notwendige Bedingung: $G'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3{,}89 \vee x_2 = 0{,}11$

Mit $G''(3{,}89) < 0$ und $G(3{,}89) = 23{,}32$ gilt:

Bei einer Produktion von 3,89 ME wird der maximale Gewinn von 23,32 GE erzielt.

2.4

Operator	Beschreibung
Bestimmen, Ermitteln	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren.

Erläuterungen: Die Wahl der Mittel (z.B. ob graphisch oder numerisch) bleibt offen. Durch Spezifizierung wie „Ermitteln Sie graphisch“ oder „Bestimmen Sie rechnerisch“ würde die Verwendung der Werkzeugebene des GTR bzw. CAS beschränkt.

Beim graphischen ermitteln von Lösungen kann dies durch Anfertigung einer Zeichnung auf Papier oder durch Darlegung der Lösungsschritte beim graphischen Lösen mit GTR bzw. CAS erfolgen.

Beispiel: Gehen Sie davon aus, dass gilt: $a = \frac{1}{225}c - \frac{23}{450}$ und $b = -30a$

Ermitteln Sie den Bereich, in dem der Parameter c liegen muss, damit K eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion ist … . (Abitur 2017 LK CAS, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont

Mit $b^2 \leq 3 \cdot a \cdot c$ ist folgende Ungleichung zu lösen: $(\frac{23}{15} - \frac{2}{15}c)^2 \leq 3(\frac{1}{225}c - \frac{23}{450}) \cdot c$

Lösung mit CAS: $11{,}5 \leq c \leq 46$

(Die Erläuterungen zu den Operatoren sind der Rückkopplungsveranstaltung zum Zentralabitur 2017 entnommen, Qualitäts-und Unterstützungs-Agentur-Landesinstitut für Schule NRW)

Operatorenliste

Operator	Erläuterung
erläutern	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen
skizzieren, graphisch darstellen	wesentliche Eigenschaften von Sachverhaltenoder Objekten graphisch darstellen – auch Freihandskizzen möglich
untersuchen	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien bearbeiten
vergleichen	Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln
begründen	Sachverhalte auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen – hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen
bestimmen,ermitteln	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren
beurteilen, Stellung nehmen	zu einem Sachverhalt ein eigenständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen
herleiten, formulieren	eine Formel oder einen Zusammenhang aus bekannten Sachverhalten nachvollziehbar entwickeln
klassifizieren	eine Menge von Objekten nach vorgegebenen oder sinnvoll selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen einteilen
zeigen	Aussagen oder Sachverhalte unter Nutzung von gültigen Schlussregeln, Berechnungen bestätigen
beschreiben	Strukturen, Sachverhalte, Verfahren unter Verwendung der Fachsprache angemessen wiedergeben
bestätigen	Aussagen oder Sachverhalte mathematisch verifizieren
dokumentieren, darstellen	Gedankengang bzw. Herleitung der Problemlösung darlegen
veranschaulichen, verdeutlichen	einen Sachverhalt mit verbalen oder graphischen Erläuterungen versehen
angeben, nennen	Objekte, Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne nähere Erläuterungen, Begrün dungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen
berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen
zeichnen	hinreichend exakte graphische Darstellungen von Objekten oder Daten anfertigen
beweisen, widerlegen, nachweisen	Beweise im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen und Analogien, führen
vereinfachen, umformen	Terme, Aussagen, Formeln mittels geeigneter Strategien an den jeweiligen Sachverhalt anpassen

I Hilfsmittelfreier Teil A der zentralen Abiturprüfung

Aufgaben zur Analysis

Dieser Teil A der Abiturprüfung enthält 4 Pflichtaufgaben und 4 Wahlaufgaben. Von den Wahlaufgaben sind zwei Aufgaben zu wählen.

Lösungen Seite 22

Punkte

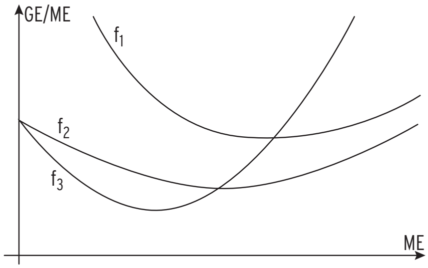
Aufgabe 1

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, c, d > 0$, $b < 0$,

x in ME, K(x) in GE,

sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.



1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu. 3

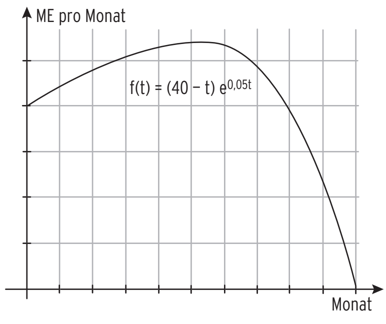
1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt. 2

Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0{,}05t}$,

(t in Monaten, f(t) in ME/Monat)

modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann. 2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei $t = 20$ liegt. 3

($f''(t) = -\frac{1}{400}\, t\, e^{0{,}05t}$ kann verwendet werden.)

Analysis

Aufgabe 3

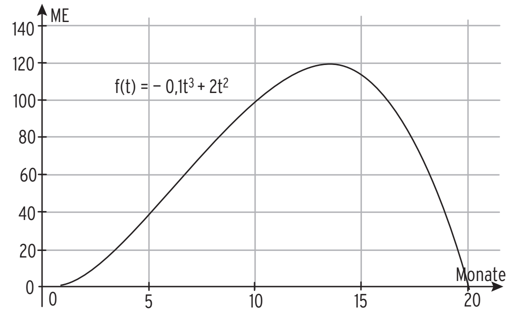
Lösungen Seite 23

Punkt

Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit

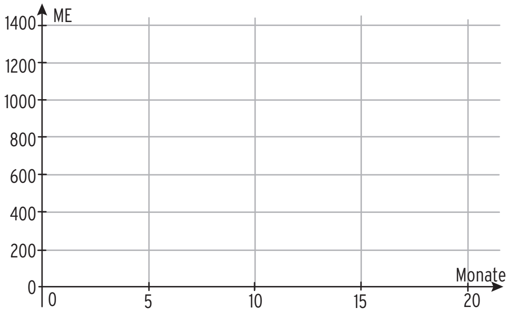
$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$

(t in Monaten, f(t) in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge. 2 Punkte

3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt.



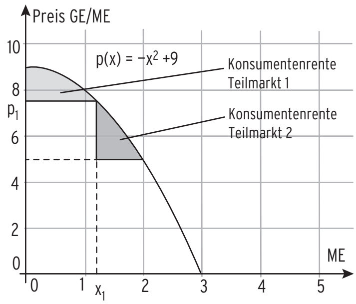
3 Punkte

Aufgabe 4

Die Preisentwicklung eines Produkts entspricht der Nachfragefunktion p mit

$p(x) = -x^2 + 9$; x in ME, p(x) in GE/ME.

Das Produkt wird auf dem Teilmarkt 1 für p_1 GE/ME und auf dem Teilmarkt 2 für 5 GE/ME verkauft. Es werden insgesamt 2 ME abgesetzt (vgl. nebenstehende Abbildung).



4.1 Beschreiben Sie den Einfluss der Höhe des Preises p_1 auf die Konsumentenrente des jeweiligen Teilmarkts. 2

4.2 Weisen Sie nach, dass die gesamte Konsumentenrente optimal abgeschöpft wird, wenn $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (ME) ist. 3

Analysis

Aufgabe 5

Lösungen Seite 24

Punkte

Die folgende Tabelle gibt die Stückkosten k, die variablen Stückkosten k_v und die Grenzkosten K′ zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K an (x in ME; K(x) in GE):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
k(x)	201,0	124,0	97,0	84,0	77,8	76,0	77,6	82,0
$k_v(x)$	57,0	52,0	49,0	48,0	49,0	52,0	57,0	64,0
K′(x)	51,0	44,0	43,0	48,0	59,0	76,0	99,0	128,0

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

1.1 Das Betriebsminimum liegt bei 4 ME. 2

1.2 Die Kosten steigen zwischen 0 und 4 ME degressiv. 2

1.3 Die Fixkosten belaufen sich auf 144 GE. 1

Aufgabe 6

Die Absatzentwicklung eines Produktes wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$f(t) = 9t \cdot e^{-0{,}3t} + 6$

dabei steht $t > 0$ für die Monate und f(t) für den Absatz in ME pro Monat.

1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die monatlichen Absatzzahlen maximal werden (notwendiges Kriterium genügt). 3

2 Nehmen Sie mit Hilfe des Graphen Stellung zu der folgenden Aussage: In der zweiten Hälfte des ersten Jahres liegt der Zeitpunkt des maximalen Absatzrückganges. 2

Lösungen - Aufgaben zur Analysis

Hilfsmittelfreier Teil der Zentralen Abiturprüfung

Aufgabe 1 (Aufgaben Seite 12)

1.1 Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der variablen Stückkostenfunktion im Betriebsminimum, den der Stückkostenfunktion im Betriebsoptimum. Also gehört f_3 zur Grenzkostenfunktion. Die kurzfristige Preisuntergrenze ist geringer als die langfristige Preisuntergrenze, so dass f_2 der variablen Stückkostenfunktion und f_1 der Stückkostenfunktion zugeordnet werden kann.

1.2 Minimum der variablen Stückkosten:

$k_v(x) = a\,x^2 + bx + c$; $\quad k_v'(x) = 2ax + b$

Notwendig und hinreichend bei ertragsgesetzlicher Kostenfunktion:

$k_v'(x) = 0 \qquad 2ax + b = 0$

$x = -\frac{b}{2a}$; da $a > 0$ Minimalstelle

Aufgabe 2

2.1 Nullstellenbetrachtung

$f(t) = 0 \qquad (40 - t)e^{0,05t} = 0$

da $e^{0,05t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R} \qquad t = 40$

Nach 40 Monaten verschwindet das Produkt vom Markt.

2.2 Extremwertbetrachtung: Notwendige Bedingung $f'(t) = 0$

$f'(t) = 0,05(40 - t)e^{0,05t} - e^{0,05t} = e^{0,05t}\,(0,05(40 - t) - 1)$

(Produkt- und Kettenregel)

$f'(t) = 0 \qquad 0,05(40 - t) - 1 = 0$

$1 - 0,05t = 0$

$t = 20$

Dazu hinreichend für Maximum ($f''(20) = -\frac{1}{400} \cdot 20 \cdot e^1 = -\frac{e}{20} < 0$

Alternativ: $f'(20) = e^{0,05 \cdot 20}\,(0,05(40 - 20) - 1) = e^1 \cdot 0 = 0$

Lösungen - Analysis

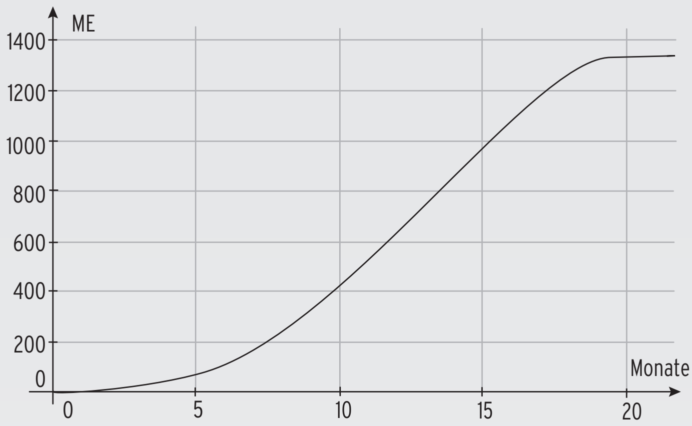
Aufgabe 3

(Aufgaben Seite 13)

3.1 Die gesamte Absatzmenge der ersten 20 Monate wird mit dem Integral berechnet.

$$\int_0^{20} f(t)dt = \int_0^{20} (-\frac{1}{10}t^3 + 2t^2)dt = \left[-\frac{1}{40}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^{20} = -4000 + \frac{16000}{3} \approx 1333{,}3 \text{ (ME)}$$

3.2



Aufgabe 4

4.1 Bei Erhöhung des Preises p_1 wird die Konsumentenrente im Teilmarkt 1 geringer und gleichzeitig die des Teilmarkts 2 höher. Bei Verringerung des Preises verhält es sich umgekehrt.

(Bei einem Preis p_1 von 9 GE/ME erlischt der Teilmarkt 1, bei einem Preis p_1 von 5 GE/ME erlischt der Teilmarkt 2.)

4.2 Damit die Konsumentenrente höchstmöglich abgeschöpft wird, muss der Preis p_1 so gewählt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks unter dem Flächenstück zur Konsumentenrente Teilmarkt 1 möglichst groß wird (dadurch wird die Konsumentenrente möglichst klein).

$A(x) = x \cdot f(x) - 5x = -x^3 + 9x - 5x = -x^3 + 4x$

Extremwertbetrachtung: $A'(x) = 0$ $\quad -3x^2 + 4 = 0$

$x^2 = \frac{4}{3}$

Mit $x > 0$: $\quad x = \sqrt{\frac{4}{3}}$

Dazu hinreichend: $A''(\sqrt{\frac{4}{3}}) = -6\sqrt{\frac{4}{3}} < 0$

Lösungen - Analysis

Aufgabe 5

(Aufgaben Seite 14)

1.1 Die variablen Stückkosten und die Grenzkosten sind im Betriebsminimum gleich, also ist aus der Tabelle abzulesen: $x_{BM} = 4$. Die Aussage ist also wahr.

1.2 Die Grenzkostenfunktion K' gibt den Kostenzuwachs an. Dieser nimmt nur bis 3 ME ab (degressiver Zuwachs), danach wieder zu (progressiver Zuwachs). Daher ist die Aussage falsch.

1.3 Die Stückkostenfunktion und die variable Stückkostenfunktion unterscheiden sich nur durch den Term $\frac{K_{fix}}{x}$.

Daher gilt: $K_{fix} = k(1) - k_v(1) = 201 - 57 = 144$.

Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 6

1 $f(t) = 9t \cdot e^{-0,3t} + 6$; $f'(t) = 9 \cdot e^{-0,3t} + (-0,3) \cdot 9t \cdot e^{-0,3t} = 9 \cdot e^{-0,3t}(1 - 0,3t)$

(mit Produkt und Kettenregel)

Notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$ $\qquad 9(1 - 0,3t) = 0 \qquad (e^{-0,3t} \neq 0)$

$$-0,3t + 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$$

Der maximale Absatz wird im 4. Monat erreicht.

2 Der stärkste Absatzrückgang entspricht dem Wendepunkt mit re/li-Krümmungswechsel.

Dieser liegt laut Graph bei ungefähr (8 | 12,5). Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 7

(Aufgaben Seite 15)

1 Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragefunktion:

$p_A(x) = p_N(x)$ $\qquad \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

$$x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow x = \pm 4$$

Da negative Produktionswerte ökonomisch sinnlos sind, liegt die Gleichgewichtsmenge bei 4 ME. Der Gleichgewichtspreis liegt bei 16 GE/ME: $\quad p_A(4) = p_N(4) = 16$

Die Abbildung bestätigt das Ergebnis.

2 Der Inhalt der zwischen dem Graphen von p_N und $y = 16$ eingeschlossenen Fläche stellt den Geldwert der Konsumentenrente dar, der Flächeninhalt zwischen $y = 16$ und dem Graphen von p_A den Geldwert der Produzentenrente. Die Fläche der Konsumentenrente ist kleiner als die Fläche der Produzentenrente, somit ist die Konsumentenrente geringer als die Produzentenrente.

2 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Formelsammlung zur Linearen Algebra

Lineare Verflechtung

$$\begin{tikzcd} R_i \arrow[r, "A", "\text{Stufe 1}"'] \arrow[rr, bend right, "C"'] & Z_j \arrow[r, "B", "\text{Stufe 2}"'] & E_k \end{tikzcd}$$

R_i: Rohstoffe; Z_j: Zwischenprodukte; E_k: Endprodukte

Verflechtungsmatrizen

Rohstoff-Zwischenprodukt ;	Zwischenprodukt-Endprodukt;	Rohstoff-Endprodukt-Matrix
A	B	C

Es gilt der Zusammenhang: $\boxed{C = A \cdot B}$

Verbrauchs-, Produktionsvektoren

$\vec{r}$: Rohstoffvektor $\vec{z}$: Zwischenproduktvektor $\vec{x}$: Endproduktvektor

Es gilt: $\boxed{A \cdot \vec{z} = \vec{r} \qquad B \cdot \vec{x} = \vec{z} \qquad C \cdot \vec{x} = \vec{r}}$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Einheit)

Rohstoffkosten: $\vec{k}_R$ Fertigungskosten in Stufe 1: $\vec{k}_Z$ Fertigungskosten in Stufe 2: $\vec{k}_E$

Kostenvektoren sind Zeilenvektoren.

Die **Gesamtkosten für die Produktion $\vec{x}$** setzen sich zusammen aus

Rohstoffkosten +	Fertigungskosten in Stufe 1 +	Fertigungskosten in Stufe 2 +	fixe Kosten
K_R	K_Z	K_E	K_f

Es gilt: $\boxed{K_R = \vec{k}_R \cdot \vec{r} \qquad K_Z = \vec{k}_Z \cdot \vec{z} \qquad K_E = \vec{k}_E \cdot \vec{x}}$

Variable Herstellungskosten $\vec{k}_v$ pro Einheit eines Endproduktes: $\boxed{\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E}$

Gesamtkosten K für die Produktion $\vec{x}$ gilt bei Fixkosten K_f:

$$\boxed{\begin{aligned} K &= K_v + K_f = \vec{k}_v \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R \cdot C \cdot \vec{x} + \vec{k}_Z \cdot B \cdot \vec{x} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R \cdot \vec{r} + \vec{k}_Z \cdot \vec{z} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f \end{aligned}}$$

Inverse Matrix

Existenz: Die **quadratische** Matrix A ist **invertierbar** (die Inverse A^{-1} existiert), wenn

$Rg(A) = n$ **oder** das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist **eindeutig lösbar.**

Berechnung: Umformung von $(A \mid E)$ in $(E \mid A^{-1})$

Eigenschaften: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ $\qquad (A^{-1})^{-1} = A$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\qquad (r \cdot A)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}$

Stochastische Matrizen

Übergangssituation mit Spaltensumme 1

nach \ von	A	B	C
A	0,9	0	0
B	0	0,8	0,5
C	0,1	0,2	0,5

Die **Übergangsmatrix M** ist ein **stochastische Matrix**, bei der die Summe in jeder Spalte gleich 1 ist und jede Zahl größer oder gleich null ist.
Die aktuelle Verteilung wird durch Zustandsvektoren $\vec{v}$ (Spaltenvektor) beschrieben.
Ein Zustandsdiagramm (Übergangsdiagramm) lässt sich durch eine Übergangsmatrix M beschreiben.

Markow-Kette mit der Anfangsverteilung $\vec{v}_0$ (Zustand zur Zeit n = 0; Startverteilung) und der Übergangsmatrix M:

$\vec{v}_0 \rightarrow \vec{v}_1 (= M \cdot \vec{v}_0) \rightarrow \vec{v}_2 (= M \cdot \vec{v}_1) \rightarrow \vec{v}_3 (= M \cdot \vec{v}_2) = M^2 \cdot \vec{v}_0) \rightarrow \ldots$

Dabei ist z. B. $\vec{v}_1$ der Zustand nach einem Übergang.

Übergangsmatrix für zwei Zeitabschnitte: $M \cdot M = M^2$

Gilt $\lim\limits_{n \to \infty} M^n = M_\infty$, besteht die Matrix M_∞ aus lauter gleichen Spalten: $M_\infty = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & p_1 \\ p_2 & p_2 & p_2 \\ p_3 & p_3 & p_3 \end{pmatrix}$

M_∞ heißt Grenzmatrix.

Der Spaltenvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ ist ein Fixvektor.

Berechnung stationärer Zustände: $M \cdot \vec{p} = \vec{p}$

Dabei ist $\vec{p}$ der Gleichgewichtszustand (stationäre, langfristige, stabile Verteilung).
Die stationäre Verteilung hängt nicht von der Anfangsverteilung ab.

Zur Berechnung von $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ (Fixvektor) ist das

LGS $M \cdot \vec{p} = \vec{p}$ unter der Nebenbedingung $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (= 100 %) zu lösen.

Aufgaben zu Linearer Optimierung

Aufgabe 1 **Lösung Seite 92**

Punkte

Das Unternehmen Kaffeeduft hat sich auf die Produktion und den Verkauf von Kaffeekapseln und den zugehörigen Kaffeemaschinen spezialisiert.

Die Kapseln zur Kaffeezubereitung werden in den drei Endprodukten Espresso, Grande und Cappuccino angeboten. Espresso soll zukünftig in drei verschiedenen Qualitätsstufen Q_1, Q_2 und Q_3 angeboten werden.
Der Rösterei stehen dazu maximal 600 Minuten pro Tag zur Verfügung.

Qualitätsstufe	Q_1	Q_2	Q_3
Zeitaufwand der Rösterei für eine ME in der jeweiligen Qualitätsstufe in Minuten	2	4	8

Der tägliche Absatz ist beschränkt. Vom Espresso der Qualitätsstufe Q_3 können maximal 15 ME abgesetzt werden, die Absatzmengen in den Qualitätsstufen Q_1 und Q_2 können zusammen 100 ME nicht überschreiten. Das Unternehmen möchte den Gesamtdeckungsbeitrag maximieren.

Qualitätsstufe	Q_1	Q_2	Q_3
Deckungsbeitrag in der jeweiligen Qualitätsstufe in Euro pro ME	45	60	80

1 Geben Sie die Restriktionen und die Zielfunktion des Maximierungsproblems an. 6

2 Ermitteln Sie entsprechend des Simplexverfahrens das Anfangstableau . 3

3 Erläutern Sie, dass es sich bei dem folgenden Tableau um das optimale Tableau handelt.

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
-2	0	0	1	-8	-4	80
0	0	1	0	1	0	15
1	1	0	0	0	1	100
-15	0	0	0	-80	-60	$Z-7200$

2

4 Leiten Sie aus dem Tableau in 3 alle für das Unternehmen Kaffeeduft relevanten Informationen her. 5

(Abitur Berufskolleg NRW 2015)

Aufgabe 2 Lösung Seite 93

Punkte

Der Küchenhersteller K-Küchen stellt für die neue Comfortküche aus Furnierplatten (E_1), Scharnieren (E_2), Einlegeböden (E_3) und Edelstahlgriffen (E_4) zunächst drei Schrankelemente Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus schließlich zwei Schranktypen F_1 und F_2 her.
Der Materialfluss in Stück des jeweiligen Folgeproduktes ist durch die beiden folgenden Tabellen gegeben.

	Z_1	Z_2	Z_3
E_1	5	7	3
E_2	8	11	7
E_3	2	0	1
E_4	3	6	0

	F_1	F_2
Z_1	7	3
Z_2	2	6
Z_3	10	15

1 Aus einem Restbestand von 2 200 Furnierplatten (E_1) sollen Schrankelemente (Z_1, Z_2 und Z_3) gefertigt werden (vgl. Rohstoff-Zwischenproduktmatrix), die an einen anderen Küchenhersteller zum Sonderpreis verkauft werden. Allerdings nimmt dieser Hersteller maximal 300 Schrankelemente Z_2 und maximal 200 Schrankelemente Z_3 ab. Fehlende Scharniere E_2, Einlegeböden E_3 und Edelstahlgriffe E_4 können in beliebigerMenge besorgt werden.
Für die Stückdeckungsbeiträge von 70 € für Z_1, 50 € für Z_2 und 60 € für Z_3 soll der Gesamtdeckungsbeitrag maximiert werden.

1.1 Geben Sie die Restriktionen und die Zielfunktion des Maximierungsproblems an. 6

1.2 Ermitteln Sie entsprechend des Simplexverfahrens das Anfangstableau . 3

1..3 Nach Umformung mit Hilfe des Simplexverfahrens erhält man das folgende Tableau.

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b_i
1	1,4	0	0,2	0	− 0,6	320
0	1	0	0	1	0	300
0	0	1	0	0	1	200
0	− 48	0	− 14	0	− 18	Z − 34400

Erläutern Sie, dass es sich bei dem folgenden Tableau um das optimale Tableau handelt.
Interpretieren Sie das Tableau hinsichtlich der optimalen Produktionszahlen, des optimalen Gesamtdeckungsbeitrags und ggf. überschüssiger Kapazitäten. 4

(Berufskolleg NRW, 2012.)

Aufgabe 3 **Lösung Seite 94**

Punkte

1 In einem Textilunternehmen werden aus den Stoffsorten S_1, S_2 und S_3 die zwei Trikotsorten M_1 und M_2 für Männer gefertigt.
Der Materialbedarf für die Produktion ist in folgender Tabelle in Mengeneinheiten angegeben.

	M_1	M_2
S_1	12	10
S_2	6	15
S_3	3	18

Von Rohstoff S_1 stehen noch 500 ME zur Verfügung und von Rohstoff S_2 können noch bis zu 300 ME verarbeitet werden. Von Rohstoff S_3 sollen mindestens 90 ME verarbeitet werden. Die Stückdeckungsbeiträge der Endprodukte betragen 20 GE/ME für M_1 und 10 GE/ME für M_2.
Der Verbrauch der Rohstoffe soll so optimiert werden, dass der Deckungsbeitrag maximal wird.

1.1 Bestimmen Sie das zugehörige Ungleichungssystem und die Gleichung der Zielfunktion. 8

1.2 Ermitteln Sie grafisch den maximalen Gesamtdeckungsbeitrag und die dabei zu Grunde liegenden Mengen der Endprodukte M_1 und M_2. 7

Es wird befürchtet, dass der Stückdeckungsbeitrag von M_1 sinken könnte.

1.3 Beurteilen Sie, ob sich die optimale Mengenkombination verändert, wenn der Stückdeckungsbeitrag von M_1 um 5 GE/ME sinkt. 4

1.4 Leiten Sie her, um wie viel GE/ME der Stückdeckungsbeitrag von M_1 sinken kann, ohne dass sich die optimale Mengenkombination verändert: 3

(Abitur Berufskolleg NRW 2011.)

Aufgabe 4 **Lösung Seite 95** Punkte

Die Düsseldorfer DüFa GmbH stellt Fahrräder für den anspruchsvollen heimischen Markt her und hat sich dabei auf Rahmen für Cityräder, Trekkingräder und Mountainbikes spezialisiert.

1 Die Rahmen der Cityräder E1, Trekkingräder E2 und Mountainbikes E3 werden auf den Maschinen M1, M2 und M3 hergestellt.
In der folgenden Tabelle sind die Bearbeitungszeiten in Zeiteinheiten (ZE) pro Mengeneinheit und die maximalen Laufzeiten der Maschinen angegeben.

	E1 (ZE/ME)	E2 (ZE/ME)	E3 (ZE/ME)	max. Laufzeit in ZE
M1	1	2	4	600
M2	5	6	10	1300
M3	1	1	1	200

Als Stückdeckungsbeitrag veranschlagt der Rahmenproduzent 40 GE/ME für E1, 65 GE/ME für E2 und 90 GE/ME für E3.
Die DüFa GmbH möchte den Deckungsbeitrag maximieren.

1.1 Leiten Sie aus den obigen Angaben das Starttableau (Anfangstableau) zur Maximierung des Deckungsbeitrags her. Dabei sollen x_1, x_2 und x_3 die jeweiligen Anzahlen der Rahmen E1, E2 und E3 bezeichnen. 6

1.2 Begründen Sie, dass das folgende Tableau noch nicht das optimale Tableau ist.

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b
–1	–0,4	0	1	–0,4	0	80
0,5	0,6	1	0	0,1	0	130
0,5	0,4	0	0	– 0,1	1	70
–5	11	0	0	–9	0	Z – 11700

1.3 Bestimmen Sie – ausgehend vom Tableau in 1.2 – das optimale Tableau mit anschließender Angabe des maximalen Deckungsbeitrags, der Anzahl der zu erstellenden Rahmen und der verbleibenden Maschinenkapazitäten. 10

1.3 nicht im Abi'25 verlangt

1.4 Für einen alternativen Produktionsprozess ergibt sich das folgende optimale Tableau: 5

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b
1	–3	0	–0,2	0	–1	20
0	2	1	–0,5	0	2,5	150
0	–0,5	0	–3,5	1	4	110
0	–12	0	–1	0	–8	Z – 14350

Auf der Maschine M2 sollen aufgrund von Produktionsfehlern Teile nachgearbeitet werden. Hierfür werden 150 ZE veranschlagt. Begründen Sie anhand der Daten des Tableaus, ob die Nacharbeiten auf der Maschine M2 ohne Zeitprobleme durchgeführt werden können.
(Berufskolleg NRW 2016.)

Aufgabe 5 **Lösung Seite 96** **Punkte**

Das Unternehmen BEL FRUTI verarbeitet u. a. Papayas und Ananas und füllt sie in Konservendosen ab. Um entsprechende Rabatte zu erhalten, müssen mindestens 50 Mengeneinheiten (ME) Ananas pro Tag geordert werden. Die Früchte werden zunächst auf der Maschine M_1 gewaschen und geschält. Die Maschine muss regelmäßig gereinigt werden, so dass sie nur 19 Stunden pro Tag eingesetzt werden kann. Die Früchte werden anschließend auf einer zweiten Maschine M_2 portioniert und danach auf der Maschine M_3 in Dosen verfüllt.

3.1 Die Produktionsleitung soll die Verarbeitungsmengen von Papayas und Ananas bestimmen, die zu einem maximalen Deckungsbeitrag in GE führen. Alle zur Lösung erforderlichen Informationen sind den nachfolgenden Tabellen zu entnehmen:

	Papaya Minuten/ME	Ananas Minuten/ME	Maximale Auslastung Minuten/Tag
M_1	2	3	1140
M_2	1,5	3	900
M_3	1	1	450

	Papaya	Ananas
Mindestbestellmenge in ME	0	50
Stückdeckungsbeiträge in GE/ME	0,6	1

3.1.1 Zeigen Sie, dass zur Lösung des Optimierungsproblems die nachfolgenden Bedingungen gelten (x_1 = ME Papayas und x_2 = ME Ananas): $x_1, x_2 \geq 0$ — 6

$x_2 \geq 50$

$x_2 \leq -\frac{2}{3}x_1 + 380$

$x_2 \leq -0{,}5x_1 + 300$

$x_2 \leq -x_1 + 450$

3.1.2 Zeichnen Sie mit den vorgegebenen Angaben aus 1.1.1 den zur graphischen Lösung des Optimierungsproblems erforderlichen Planungsbereich in das Koordinatensystem in Anlage 1. — 6

3.1.3 Bestimmen Sie die jeweilige Verarbeitungsmenge für Papayas und Ananas, um den Deckungsbeitrag zu maximieren. — 5

3.1.4 Berechnen Sie den maximalen Deckungsbeitrag sowie die Auslastungszeiten der Maschinen. — 6

3.1.5 Begründen Sie, dass es keine Mengenkombination gibt, bei der die maximal mögliche Laufzeit der Maschine 1 M voll ausgenutzt wird, ohne die anderen Restriktionen zu verletzen. — 5

Lösungen - Aufgaben zu Linearer Optimierung

Lösung Aufgabe 1 Aufgabe Seite 82

1 Restriktionen und die Zielfunktion des Maximierungsproblems

x_i (i = 1, 2, 3) ME Espresso in der Qualitätsstufe Q_i (i = 1, 2, 3)

Nichtnegativitätsbedingung: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 600$$
$$x_3 \leq 15$$
$$x_1 + x_2 \leq 100$$

Zielfunktion: $Z = 45x_1 + 60x_2 + 80x_3$; Z soll maximiert werden

2 Anfangstableau

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
2	4	8	1	0	0	600
0	0	1	0	1	0	15
1	1	0	0	0	1	100
45	60	80	0	0	0	Z

3 Das Simplextableau ist optimal, da sich in der Zielzeile keine positiven Koeffizienten mehr befinden.

4 Aus dem Endtableau liest man folgende Werte für die Produktionsmengen und nicht genutzten Kapazitäten ab: $x_1 = 0$; $x_2 = 100$; $x_3 = 15$; $u_1 = 80$; $u_2 = 0$; $u_3 = 0$

Espresso der Qualitätsstufe Q_1 soll nicht mehr hergestellt werden,

es sollen 100 ME Espresso der Qualitätsstufe Q_2 und 15 ME der Qualitätsstufe Q_3 angeboten werden.

Die Rösterei hat 80 Minuten pro Tag freie Kapazitäten.

Der Gesamtdeckungsbeitrag ist mit 7200 € maximal.

Hinweis: Basisvariable sind x_2, x_3 und u_1;

Nichtbasisvariable sind x_1, u_2 und u_3

Lösung Aufgabe 2 Aufgabe Seite 83

1.1 Restriktionen und Zielfunktion

x_i (i = 1, 2, 3) gibt die Anzahl der Schrankelemente Z_i (i = 1, 2, 3) an.

Nichtnegativitätsbedingung: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Einschränkende Bedingungen (Restriktionen):

$$5x_1 + 7x_2 + 3x_3 \leq 2200$$
$$x_2 \leq 300$$
$$x_3 \leq 200$$

Zielfunktion: $Z = 70x_1 + 50x_2 + 60x_3$; $Z \rightarrow \max.$

1.2 Maximaler Gesamtdeckungsbeitrag

Das zugehörige Simplextableau lautet dann:

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b_i
5	7	3	1	0	0	2200
0	1	0	0	1	0	300
0	0	1	0	0	1	200
70	50	60	0	0	0	Z

1.3

1	1,4	0	0,2	0	− 0,6	320
0	1	0	0	1	0	300
0	0	1	0	0	1	200
0	− 48	0	− 14	0	− 18	Z − 34400

Das Simplextableau ist optimal, da sich in der Zielzeile keine positiven Koeffizienten mehr befinden.

Interpretation

Aus dem Simplextableau liest man folgende Werte für die Produktionsmengen und nicht genutzten Kapazitäten ab: $x_1 = 320$; $x_2 = 0$; $x_3 = 200$; $u_1 = 0$; $u_2 = 300$; $u_3 = 0$

Es sollen 320 Schrankelemente Z_1 und 200 Schrankelemente Z_3 gefertigt werden.

Dabei werden alle Furnierplatten verwendet und es könnten noch 300 Schrankelemente Z_2, aber keine von Z_3mehr abgesetzt werden.

Der Gesamtdeckungsbeitrag ist mit 34 400 € maximal.

3 Stochastik

Formelsammlung zur Stochastik

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$

Für das Gegenereignis $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Additionssatz $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Multiplikationssatz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Zufallsvariable X: $e_i \rightarrow X(e_i) = x_i$

Erwartungswert: $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Varianz: $V(X) = (x_1 - (E(X))^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_n - (E(X))^2 \cdot P(X = x_n)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Binomialverteilung B(n; p; k)

Die Zufallsgröße X ist **binomialverteilt:** $X \sim B_{n;\,p}$

Formel von Bernoulli $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Erwartungswert $\mu = E(X) = n \cdot p$

Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Kumulierte Binomialverteilung **F(n; p; k):**

Linksseitiges Intervall: $P(X \leq 8) = F(n; p; 8)$

Ablesen aus der Tabelle der **kumulierten Binomialverteilung oder GTR**

Punktwahrscheinlichkeit: $P(X = 8) = B(n; p; 8)$

Ablesen aus der Tabelle der Binomialverteilung oder GTR

Rechtsseitiges Intervall: $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$

Intervallwahrscheinlichkeit: $P(3 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2)$

Hypothesentest (Signifikanztest):

Fehler 1. Art (α-Fehler): Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese H_0 abgelehnt wird, obwohl sie richtig ist.

Fehler 2. Art (β-Fehler): Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

Die bei einem Test bzw. einer Untersuchung akzeptierte Wahrscheinlichkeit, bei einer Entscheidung einen Fehler 1. Art zu begehen, nennt man auch Signifikanzniveau α.

Aufgaben zur Stochastik **mit Hypothesentest**

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 118**

Lösung Seite 118

Im Bereich Thermodruck verwendet die Druckfix GmbH neben den Walzen aus eigener Herstellung auch Walzen, die regional hergestellt werden und solche, die aus Asien importiert werden. Vor dem Einbau einer Walze durchläuft diese bei Druckfix eine Qualitätsanalyse. Defekte Walzen werden als Ausschuss aussortiert.
Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die jährliche Bezugsmenge, die Ausschussquote und den Bezugspreis

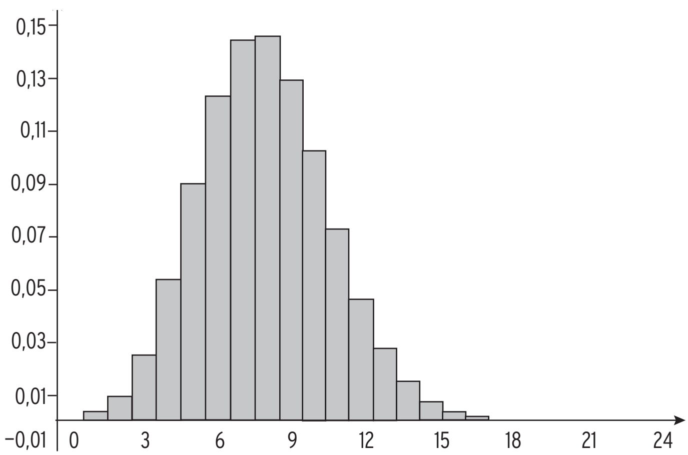
Herkunft	**Druckfix**	**Regional**	**Asien**
Bezugsmenge (Stück)	2000	3000	5000
Ausschussquote (%)	2	5	8
Bezugspreis (€/Stück)	49,98	39,37	18,69

1 Für die Preiskalkulation wird der Bezugspreis der defekten Walzen auf die intakten Walzen umgelegt.
Ermitteln Sie die jährliche Ausschussmenge, die Anzahl intakter Walzen und den durchschnittlichen Einstandspreis für eine intakte Walze.

2 Einer Lieferung aus Asien wird eine Stichprobe von 100 Walzen entnommen und hinsichtlich ihrer Qualität untersucht. Man kann davon ausgehen, dass die Verteilung der Zufallsgröße X: „Anzahl der defekten Walzen in der Stichprobe" binomialverteilt ist.

2.1 Bestimmen Sie den Erwartungswert der Verteilung und die Wahrscheinlichkeit, dass X tatsächlich den Erwartungswert annimmt.

2.2 Das folgende Histogramm zeigt die Verteilung der Zufallsgröße X.



Aufgabe 1 **Seite 2/2**

2.2 Prüfen Sie mit Hilfe des Histogramms folgende Aussagen der Qualitätsabteilung:

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 20 Walzen defekt sind, ist so gut wie Null.

B: Die Wahrscheinlichkeit, dass 9 Walzen defekt sind, ist größer als die von jeder anderen Anzahl defekter Walzen.

C: Es ist gleich wahrscheinlich 6 oder 9 defekte Walzen in der Stichprobe zu haben.

D: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Walzen defekt sind, ist kleiner als 3%.

2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Walzen defekt sind.

Gehen Sie im weiteren Verlauf von Lieferungen im Umfang von n = 100 und binomialverteilten Zufallsgrößen aus.

3 Es werden alle 100 Walzen einer regionalen Lieferung einer Qualitätsanalyse unterzogen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt beträgt p = 0,05.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Höchstens 2 Walzen sind defekt.

B: Es gibt mindestens 3 defekte Walzen.

C: Es befinden sich mindestens 4 und höchstens 7 defekte Walzen in der Stichprobe.

D: In der Stichprobe befindet sich die erwartete Menge intakter Walzen.

E: Alle Walzen sind intakt.

4 Der asiatische Lieferant beabsichtigt seine Preise zu erhöhen und begründet dies mit einer Qualitätsverbesserung, da der Produktionsprozess neu strukturiert wurde.

Der Lieferant möchte mit einem Hypothesentest nachweisen, dass seine Ausschussquote auf unter 4 % gesunken ist.

4.1 Leiten Sie eine Entscheidungsregel über die Anzahl defekter Walzen in einer Stichprobe von 100 bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}1$ her.

4.2 Bestimmen Sie den Fehler 2. Art, wenn die tatsächliche Ausschussquote bei 2 % bzw. 3 % liegt. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus Sicht des Lieferanten.

(NRW Berufskolleg 2010.)

Aufgabe 2 **Lösung Seite 119** **Punkte**

Der Küchenhersteller K-Küchen hat eine Luxus-Küche für das obere Preissegment entwickelt, die sich durch ein hochwertiges Schubladensystem, Echtholzfronten und eine patentierte Schrankbeleuchtung von den bisher produzierten Produktlinien unterscheidet. Von einem Zulieferer bezieht K-Küchen das neuartige Scharniersystem, bei dem sich die Schubladen nach nur leichter Berührung selbsttätig schließen.
Durchschnittlich sind 5 % der Scharniere defekt.

3.1 Die gelieferte Ware soll nur bei hinreichender Qualität angenommen werden. Der Küchenhersteller prüft vor der Warenannahme eine Stichprobe von 5 Kartons mit je 20 Scharnieren.

3.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse: 6

E_1: In der Stichprobe von 100 Scharnieren befinden sich höchstens so viele defekte Scharniere, wie „zu erwarten" ist.

E_2: In einem zufällig ausgewählten Karton mit 20 Scharnieren befinden sich mehr als zwei defekte Scharniere.

3.1.2 Die Ware soll abgelehnt werden, wenn sich unter den 5 geprüften Kartons der Stichprobe mindestens ein Karton mit mehr als 3 defekten Scharnieren befindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Karton mehr als 3 defekte Scharniere enthalten sind, liegt bei ca. 1,59 %.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung der Lieferung. 5

3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der mindestens zu testenden Scharniere, bei der mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens ein defektes Scharnier zu finden ist. 8

3.3 Vor der Auslieferung der Luxus-Küchen überprüft K-Küchen die Beleuchtungen. Erfahrungsgemäß funktionieren 10 % der Beleuchtungen nicht einwandfrei. Ein nachträglicher Austausch der defekten Beleuchtung kostet das Unternehmen 80 € pro Küche.
Ein Prüfgerät, das die Beleuchtungen bereits vor dem Einbau prüft, kann für 580 € erworben werden. Sein Einsatz kostet täglich 30 € und ein Austausch der als defekt eingestuften Beleuchtung kostet dann nur 20 €. Das Testgerät erkennt mit 99 %-iger Sicherheit eine defekte Beleuchtung, allerdings zeigt es auch bei 2 % der funktionierenden Beleuchtungen einen Defekt an.

3.3.1 Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm. 4

3.3.2 In 100 Tagen werden insgesamt 1000 Küchen produziert. 7
Beurteilen Sie, ob die Anschaffung des Testgeräts zu einer Kostenersparnis führt.

(Teile aus NRW Berufskolleg 2012.)

Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Lösung Seite 120**

Punkte

Das Unternehmen Agrema AG fertigt unter anderem Fan-Fahnen für die Frauen-Weltmeisterschaft 2011.

2.1 Die Fahnen werden in 40er-Paketen an Shops in ganz Deutschland verkauft. Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der minderwertigen Fahnen in einem Paket. Gehen Sie davon aus, dass X binomialverteilt ist. Der Mitarbeiter für Qualitätsanalyse erstellt für X ein Diagramm der kumulierten Wahrscheinlichkeiten (vgl. Abb. 1)

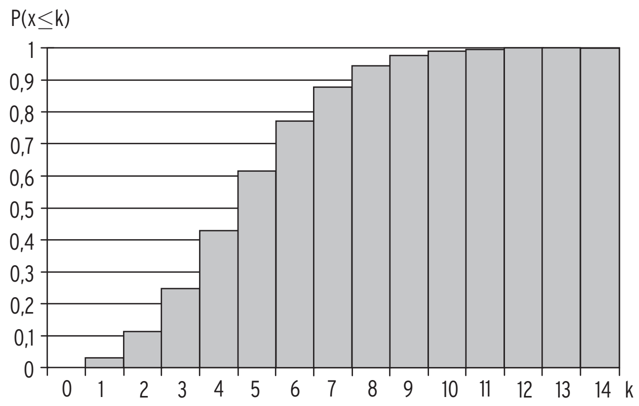


Abb. 1: Kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ für k minderwertige Fahnen von n = 40 Fahnen. Für alle k mit k > 14 beträgt die gerundete kumulierte Wahrscheinlichkeit 1

Beurteilen Sie anhand des vorgegebenen Diagrammes folgende Aussagen. 11

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket höchstens fünf Fahnen minderwertig sind, beträgt ca. 62 %.

B: Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket genau 4 Fahnen minderwertig sind, beträgt ungefähr 0,42.

C: Die Wahrscheinlichkeit, dass 13 oder 14 minderwertige Fahnen im Paket sind, ist annähernd gleich hoch.

D: Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zwei Fahnen minderwertig sind beträgt ca. 90%.

E: Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket mindestens zwei und höchstens sechs minderwertige Fahnen sind, beträgt ca. 55 %.

Aufgabe 3	Seite 2/2	Punkte

2.2 Genauere Untersuchungen der Qualität der Fahnen ergeben eine Ausschusswahrscheinlichkeit von 12,5%. Die Paketgröße soll auf 50 Fahnen aufgestockt werden. Es wird festgelegt, dass ein Paket nicht bezahlt werden muss, wenn sich darin mehr als 8 minderwertige Fahnen befinden.

2.2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein verkauftes Paket nicht berechnet wird. 4

2.2.2 Ermitteln Sie den Verkaufspreis eines Pakets, wenn das Unternehmen im Durchschnitt einen Paketpreis von 320 GE erzielen will. 4

2.2.3 Ein besonders interessierter Kunde möchte Fahnen aus der laufenden Produktion begutachten. Untersuchen Sie, wie viele Fahnen er entnehmen müsste, bis er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine minderwertige Fahne gezogen hat. 6

Die Agrema AG bezieht Rohpolyester für die Fahnen von dem Unternehmen CheijDong aus Taiwan. Nach Aussage des Unternehmens sind höchstens 4 % der Polyesterbahnen fehlerhaft und damit Ausschuss. Die Ware wird beim Eingang durch eine Stichprobe mit Umfang $n = 50$ überprüft.

2.3 Ermitteln Sie für $p = 0{,}04$ die zu erwartende Anzahl fehlerhafter Polyesterbahnen und die durchschnittlich zu erwartende Abweichung. 4

2.4 In einigen der Stichproben waren auffällig viele fehlerhafte Polyesterbahnen. Das Textilunternehmen vermutet daher, dass man bei der Ware von einer höheren Ausschussquote ausgehen muss.

2.4.1 Erläutern Sie für diesen Sachverhalt Hypothese und Gegenhypothese sowie den Fehler 1. Art. 5

2.4.2 Leiten Sie eine Entscheidungsregel her, so dass das Textilunternehmen mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 2 % von einer höheren Ausschussquote ausgehen kann. 8

2.4.3 Prüfen Sie, ob man bei einem Stichprobenausfall von 8 defekten Polyesterbahnen mit der angegebenen Sicherheit auf eine höhere Ausschussquote schließen kann. 3

(NRW Berufskolleg 2011.) 45

Aufgabe 4 **Lösung Seite 122**

Ein Einzelhandelsunternehmen möchte sein Sortiment erweitern. Der Verkaufsleiter will Elektroartikel bei großen Handelsunternehmen kaufen und anschließend zu Sonderpreisen verkaufen.
Wegen der großen einzukaufenden Mengen kann der Einkäufer bei der Überprüfung der Warengüte nur stichprobenartig vorgehen. Dem Einkäufer ist aus früheren Einkäufen bekannt, dass die Ausschusswahrscheinlichkeit für derartige Elektroartikel 5 % beträgt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Stichprobe von 100 Geräten höchstens drei defekt sind, wenn die Teile nach dem Prüfen zurückgelegt werden.
Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl der Ausschussstücke. Interpretieren Sie den Erwartungswert.

b) Trotz der Endkontrolle der Elektrogeräte beim Einzelhändler kommt es vor, dass 0,5 % der defekten Geräte in den Verkauf geraten.
Außerdem kommen von den einwandfreien Geräten 0,3 % aus verschiedenen Gründen nicht in den Verkauf.
Zeichnen Sie ein entsprechendes Baumdiagramm.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den verkauften Geräten fehlerhafte Elektroartikel befinden.

c) Der Einkäufer und sein Stellvertreter diskutieren über die Ausschusswahrscheinlichkeit:
Der Einkäufer selbst geht davon aus, dass die Ausschusswahrscheinlichkeit von 5 % noch gilt. Sein Stellvertreter geht von einer Ausschussquote in Höhe von 10 % aus.
Es wird eine Stichprobe von 100 Teilen untersucht; zwei defekte Geräte werden entdeckt.
Zeigen Sie aufgrund dieser Stichprobe, dass bei einem 5 %-Signifikanzniveau eine der beiden Annahmen verworfen werden muss. Zeigen Sie auch, dass die andere Annahme nicht verworfen werden muss.
(Abitur 2008, Niedersachsen.)

III Aufgabensätze Aufgabenteil A zur Zentralen Abiturprüfung 2025

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

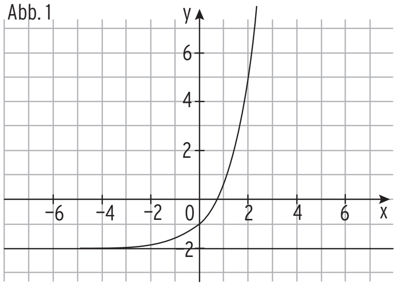
Lösungen Seite 149

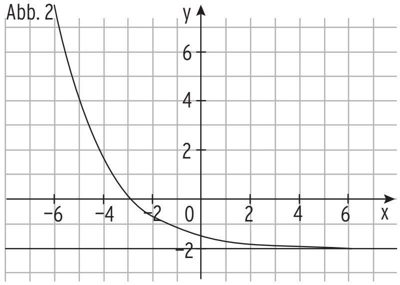
Pflichtaufgaben

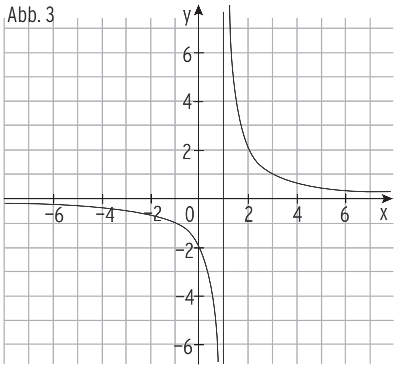
Aufgabe P1

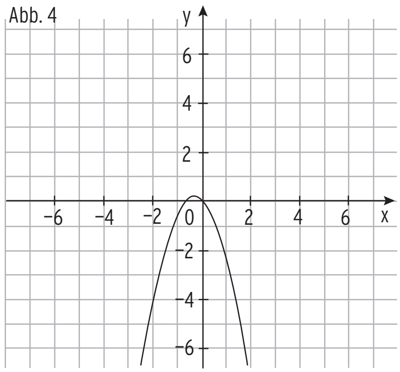
Punkte

Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen, jeweils mit sämtlichen Asymptoten:









Drei dieser vier Schaubilder werden beschrieben durch die Funktionen f, g und h mit

$f(x) = \frac{2}{x + a}$, $g(x) = -2 + be^{-0{,}5x}$, $h(x) = cx^2 - x$

a) Ordnen Sie den Funktionen f, g und h das jeweils passende Schaubild zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung. 3

b) Bestimmen Sie die Werte für a, b und c. 2

Aufgabe P2

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = ax^4 - x^2$, $a > 0$.

a) Bestimmen Sie $\int_0^1 f_a(x)dx$. 3

b) Die Graphen von f_a schneiden die x-Achse an den Stellen

$$x_1 = -\sqrt{\frac{1}{a}};\ x_{2,3} = 0;\ x_4 = \sqrt{\frac{1}{a}}.$$

Bestimmen Sie a so, dass x_1 und x_4 den Abstand 4 haben. 2

Aufgabensatz 1

Pflichtaufgaben

Aufgabe P3 — Punkte

Das Unternehmen *Blühfreude* stellt verschiedene Dünger her. Im Rahmen des Produktionsprozesses werden aus drei Rohstoffen (R), drei Zwischenprodukte (Z) und dann vier Endprodukte (E) hergestellt. Nur die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C_{RE} ist bekannt:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Stellen Sie den prinzipiell zugrundeliegenden Produktionsprozess grafisch dar. Geben Sie das Format der zugrundeliegenden Matrizen A_{RZ} und B_{ZE} an — 2

b) In der Produktionsabteilung sollen von Dünger E_1 und von E_3 je 20 Mengeneinheiten (ME) hergestellt werden sowie je 10 ME von E_2 und E_4. Berechnen Sie die benötigten Rohstoffmengen, die aus dem Lager für diese Produktion beschafft werden müssen. — 3

Aufgabe P4

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,6.

a) Welche der Abbildungen zeigt die Verteilung von X? Begründen Sie Ihre Entscheidung. — 3

b) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise $P(4 < X < 7)$ und $P(X \neq 5)$. — 2

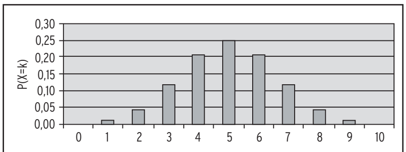


Abb. 1

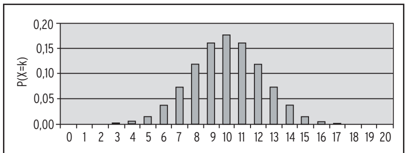


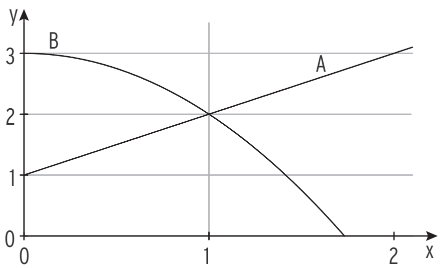
Abb. 2

Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie zwei aus den vorgelegten 4 Wahlaufgaben W1 bis W4.

Aufgabe W1 — Punkte

Die Abbildung zeigt die Graphen einer Angebots- und einer Nachfragefunktion.



a) Ordnen Sie begründet zu. — 2

b) Berechnen Sie die Konsumentenrente und kennzeichnen Sie diese in der Abbildung. — 3

Aufgabensatz 1

Wahlaufgaben

Aufgabe W2

Punkte

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ besitzt der Graph der Funktion f_t mit $f_t(x) = t^2 - x + e^{x-t}$; $x \in \mathbb{R}$, einen Tiefpunkt. Bestimmen Sie t so, dass dieser Tiefpunkt möglichst tief liegt. 5

Aufgabe W3

In einem mehrstufigen Prozess ergeben sich folgende Zusammenhänge: $C_{RE} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Die Produktion der Endprodukte erfolgt mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}$.

Im Lager befinden sich noch die folgenden Rohstoffe: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 19 \end{pmatrix}$.

Die Rohstoffpreise pro Mengeneinheit werden durch den Vektor $\vec{k}_R^{\,T} = (2 \;\; 3 \;\; 2)$ angegeben.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Endprodukte, die durch den vollständigen Verbrauch der Rohstoffe hergestellt werden können. 3

b) Berechnen Sie die Rohstoffkosten für die Produktion von 3 ME E_1, 2 ME von E_2 und 1 ME von E_3. 2

Aufgabe W4

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,8$. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dar.

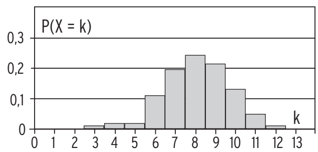


Abb. 1

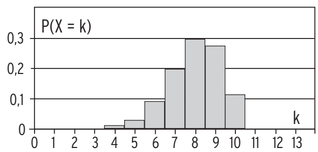


Abb. 2

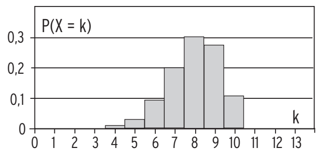


Abb. 3

a) Geben Sie die beiden Abbildungen an, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht darstellen. Begründen Sie Ihre Angabe. 2

b) Das Ziel eines Würfelspiels besteht darin, mit einem Würfel eine Sechs zu würfeln. Der Spieler hat bis zu drei Versuche.
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er die Sechs im zweiten Wurf würfelt. 3

Aufgabensatz 2

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel
Lösungen Seite 151

Pflichtaufgaben

Aufgabe P1
Punkte

Gegeben ist die in ℝ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2ax$ mit $a > 1$.

Die Nullstellen von f sind 0 und 2a.

a) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat. 2

b) Der Hochpunkt $(a \mid a^2)$ des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrates. Zwei Seiten dieses Quadrates liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abb. 1). Der Flächeninhalt des Quadrates stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein.

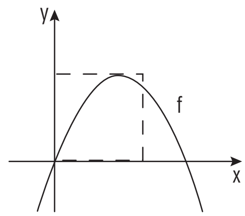


Abbildung 1: Grafik.

Bestimmen Sie den Wert von a. 3

Aufgabe P2
Abbildung 2 zeigt den Punkt P und den Graphen der in ℝ definierten Funktion f. Der Graph von f hat die einzigen Extrempunkte $(-1 \mid 1)$ und $(0 \mid 0)$.

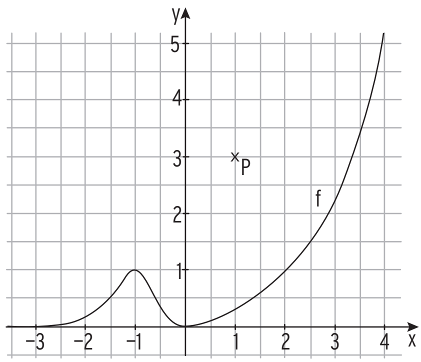


Abbildung 2: Grafik.

a) Gegeben ist die Funktion g mit $f(x) = -f(x-3)$.
Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von g an. 2

b) Der Graph einer Stammfunktion von f verläuft durch P. Skizzieren Sie diesen Graphen in der Abbildung 2. 3

Aufgabe P3
In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, auf denen jeweils eine Zahl steht. Auf drei der Kugeln steht die Zahl 2, auf zwei der Kugeln die Zahl a. Zweimal nacheinander wird eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.

a) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$ berechnet werden kann. 1

b) Die Zufallsgröße X gibt die Summe der Zahlen an, die auf den beiden entnommenen Kugeln stehen. Der Erwartungswert von X ist 8.
Bestimmen Sie den Wert von a. 4

Aufgabensatz 2

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Pflichtaufgaben

Aufgabe P4

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 2x \qquad + \; z = 0 & \\ \text{II} & -\,y \; + 2z = 0 & \\ \text{III} & 2y + b \cdot z = 1 & \quad \text{mit } x, y, z \in \mathbb{R}. \end{array}$$

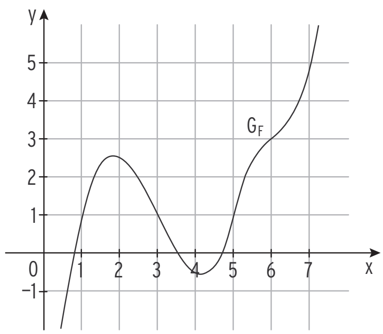
Untersuchen Sie in Abhängigkeit vom Parameter b mit $b \in \mathbb{R}$ die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems; geben Sie gegebenenfalls die Lösungen an. 5

Prüfungsteil A Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie zwei der vier Wahlaufgaben W1 bis W4.

Aufgabe W1

Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Die Abbildung zeigt den Graphen G_F von F.



a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)dx$. 2

b) Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung. 3

Aufgabe W2

Die folgende Tabelle enthält Funktionswerte und Werte der ersten beiden Ableitungen einer Polynomfunktion h vom Grad 4. Das Schaubild von h ist K.

x	− 1,5	− 1	− 0,5	0	0,5	1	1,5
h(x)	2,375	− 2	− 1,625	− 1	− 1,625	− 2	2,375
h′(x)	− 18	− 2	2	0	− 2	2	18
h″(x)	48	18	0	− 6	0	18	48

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidungen ohne Funktionsterme zu berechnen.

(1) P(− 1 | 2) liegt auf K.

(2) K besitzt zwei Wendepunkte.

(3) K besitzt drei Punkte mit waagrechter Tangente. 5

Zentrale Abiturprüfung 2024

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 2 – Analysis

2.2.2 In der nachfolgenden Abbildung sind die Graphen von $a_3'(t)$ und $a_5'(t)$ dargestellt:

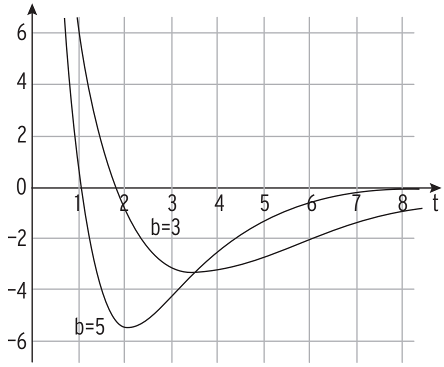


Abbildung 3

Untersuchen Sie mithilfe der obigen Abbildung, ob die folgenden Aussagen zutreffen:

B1: Zum Zeitpunkt $t = 1{,}5$ kann in der konjunkturellen Situation $b = 3$ mit einem weiteren Absatzwachstum gerechnet werden.

B2: Der stärkste Absatzrückgang tritt für $b = 3$ früher ein als für $b = 5$.

(6 Punkte)

2.3 Der Rucksack Ocean-Bag soll am Markt eingeführt werden.

Die Kostensituation für den Ocean-Bag kann durch die folgende ertragsgesetzliche Kostenfunktion beschrieben werden:

$$K_a(x) = x^3 - a \cdot x^2 + 130x + 105 \qquad \text{mit } 0 < a < 15.$$

Dabei hängt der Wert des Parameters a von den variierenden Energiekosten ab.

2.3.1 Das Konkurrenzprodukt wird für 121 GE/ME angeboten.

Bestimmen Sie den Bereich des Parameters a, für den die kurzfristige Preisuntergrenze unter dem Konkurrenzpreis liegt. (5 Punkte)

2.3.2 Der Ocean-Bag wird zum Einführungspreis p auf den Markt gebracht, so dass $E(x) = p \cdot x$ ist.

Auf Grundlage der Kostenfunktion $K(x)$ mit $K(x) = x^3 - 7x^2 + 130x + 105$ geht CycleUp von folgender Gesamtdeckungsbeitragsfunktion aus:

$$DB(x) = - \ x^3 + 7x^2 - x$$

Ermitteln Sie den Einführungspreis sowie den maximal erzielbaren Deckungsbeitrag und die damit maximal mögliche prozentuale Deckung der Fixkosten.

(6 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2024

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 – Stochastik (30 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation zu Aufgabe 3

Der größte Teil des Plastikmülls treibt in mehreren großen Müllteppichen auf den Weltmeeren. Das Unternehmen CleanUp betreibt dort Saugschiffe, die den Müll von der Oberfläche einsammeln. Bereits auf dem Schiff wird der Müll gereinigt, bevor er dann an Land weiterverarbeitet wird.

3.1 Bei der Verarbeitung des Plastikmülls wird mit einem Scanner der Wertstoff Polypropylen (PP) heraussortiert, um ihn weiterzuverarbeiten.
Insgesamt bestehen 15 % aller Teile im Müll aus Polypropylen (PP).
Dabei erkennt der Scanner durchschnittlich 95 % aller PP-Teile richtig.
Außerdem erkennt er durchschnittlich 93 % aller Nicht-PP-Teile richtig.

3.1.1 Stellen Sie diesen Sachverhalt in einem vollständigen Baumdiagramm oder einer Vierfeldertafel dar.

(3 Punkte)

3.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
E_1: Ein Plastikteil besteht aus PP und wird nicht heraussortiert.
E_2: Ein nicht heraussortiertes Plastikteil ist aus PP.
E_3: Der Scanner arbeitet korrekt.

(5 Punkte)

3.1.3 Für die Weiterverarbeitung sollen die gepressten Pellets aus Plastik möglichst viel PP enthalten.
Beim Scan von 100 Tonnen Plastik werden 20,2 Tonnen als PP-Teile aussortiert. Davon sind aber nur 14,25 Tonnen wirklich PP-Teile. Wenn man aus den aussortierten Teilen Pellets presst, beträgt der Anteil an PP-Teilen also nur $\frac{14{,}25}{20{,}2} \approx 70{,}5\ \%$.
Um diesen Anteil zu steigern, wird der PP-Scanvorgang auf die als PP-Teile aussortierten Teile erneut angewendet.
Weisen Sie nach, dass der Anteil an PP-Teilen nach dem zweiten PP-Scan bei ca. 97 % liegt.

(4 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2024

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Abbildung 4

3.2 Neben PP wird auch PE (Polyethylen) recycelt.
CycleUp stellt Brillenfassungen aus PE her.
Im ersten Produktionsschritt wird das PE mit einem Farbstoff versetzt.
Im zweiten wird es auf ein Blech gegossen.
Im dritten Arbeitsgang werden die Brillenfassungen ausgestanzt.
Im ersten Produktionsschritt tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 3 % ein Farbfehler auf.
Im zweiten kommt es mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % zu einem Gießfehler.
Im dritten kann es zu Brüchen während des Stanzvorgangs kommen.
Die Fehler treten unabhängig voneinander auf.

3.2.1 Die Wahrscheinlichkeit, dass eine fertige Brillenfassung keinen der drei Fehler aufweist, liegt bei 87,46 %. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler im Stanzvorgang.

(3 Punkte)

3.2.2 Die Wahrscheinlichkeit für einen Stanzfehler konnte durch ein verbessertes Verfahren auf 5 % gesenkt werden. Die variablen Stückkosten für eine Brillenfassung betragen 12,20 €. Einwandfreie Brillenfassungen können zu 75 € verkauft werden, Fassungen nur mit Farbfehlern oder nur mit Gießfehlern gelten als B-Ware und können zu 30 € verkauft werden. Fassungen mit Farb- und Gießfehlern sowie Fassungen mit Stanzfehlern können nicht verkauft werden.
Die Zufallsgröße X beschreibt den Deckungsbeitrag pro Brillenfassung. Erstellen Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße X und bestimmen Sie den zu erwartenden Deckungsbeitrag bei einer Monatsproduktion von 1000 Stück.

(5 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2024

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/**CAS**

3.3 CycleUp recycelt die unverkäuflichen Brillenfassungen, also den Ausschuss. Es ist von einer Binomialverteilung und von einer Ausschusswahrscheinlichkeit von 5 % auszugehen.

3.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 200 Fassungen

A: höchstens 9 Ausschuss sind.

B: mindestens 95 % kein Ausschuss sind.

C: der Ausschuss um mehr als die Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

(6 Punkte)

3.3.2 Das Recycling des Ausschusses ist erst ab einer Menge von 50 zu recycelnden Brillen für CycleUp lohnend. Ermitteln Sie, wie viele Brillen produziert werden müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90 % mindestens 50 Brillen Ausschuss sind.

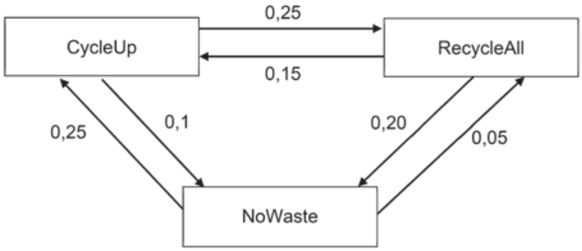
(4 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2024

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 4

4.2 Die von CycleUp aus Meeresplastik erstellten Produkte werden auf einem alternativen Markt abgesetzt.
Eine Marktforschung hat ergeben, dass der Marktanteil von CycleUp 18 % beträgt. Der Marktanteil vom größten Konkurrenten RecycleAll beträgt sogar 55 %. Der restliche Anteil von 27 % entfällt auf das Unternehmen NoWaste.
Die Kundenwanderung pro Jahr wird in der nachfolgenden Grafik veranschaulicht:



4.2.1 Stellen Sie die Übergangsmatrix M auf. (3 Punkte)

4.2.2 Für die Übergangsmatrix M gilt:

$$M^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{CycleUp} & \text{RecycleAll} & \text{NoWaste} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}485 & 0{,}245 & 0{,}345 \\ 0{,}33 & 0{,}47 & 0{,}13 \\ 0{,}185 & 0{,}285 & 0{,}525 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interpretieren Sie die Elemente der zweiten Zeile von M^2 im Sachzusammenhang.

(3 Punkte)

4.2.3 Berechnen Sie den Marktanteil der CycleUp nach vier Jahren.

(3 Punkte)

4.2.4 Die Geschäftsleitung von CycleUp möchte wissen, wie sich ihr Marktanteil langfristig entwickelt und ob das Unternehmen zum Marktführer aufsteigt.
Prüfen Sie, ob die folgenden Ansätze dafür geeignet sind, die Grenzverteilung der prozentualen Anteile zu berechnen.

I: M^{24}

II: $M^{50} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}18 \\ 0{,}55 \\ 0{,}27 \end{pmatrix}$

III: $M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

(6 Punkte)

Hinweis: 4.1 ist für die Prüfung 2025 nicht relevant.

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2024

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.1.1 Berechnen Sie die Höhe der Kosten, die CleanUp beim Einsammeln von 10 ME Plastikmüll entstehen.

$x = 10 \geq 5$: $K(10) = 10^3 - 12 \cdot 10^2 + 50 \cdot 10 + 85 = 385$

Beim Einsammeln von 10 ME Plastikmüll entstehen Kosten in Höhe von 385 GE.

1.1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion K an der Stelle x = 5 nicht differenzierbar ist.

$$K(x) = \begin{cases} K_1(x) & \text{mit } x < 5 \\ K_2(x) & \text{mit } x \geq 5 \end{cases}$$

Nach sinnvoller Erweiterung des Definitionsbereichs von K_1 (auf $x \leq 5$)

mit $K_1(x) = 20x + 60$ ist $K_1'(x) = K_1'(5) = 20$.

Für die zweite Abschnittsfunktion K_2 gilt: $K_2'(x) = 3x^2 - 24x + 50$

$K_2'(5) = 75 - 120 + 50 = 5$.

Die Funktion K ist an der Stelle x = 5 demnach nicht differenzierbar.

1.2.1 Berechnen Sie die für Ende des Jahres 2025 prognostizierte Menge an Plastikmüll.

$f(t) = (t + 10) \cdot e^{0,2t - 0,2}$; für das Jahr 2025 gilt t = 1:

$f(t) = (1 + 10) \cdot e^{0,2t \cdot 1 - 0,2} = 11$ $\qquad (e^0 = 1)$

Die prognostizierte Menge an Plastikmüll Ende 2025 wird 11 Millionen Tonnen betragen.

1.2.2 Laut der Prognose nimmt die Menge des Plastikmülls für $t \geq 0$ ständig zu.

Zeigen Sie dies mit Hilfe der Ableitung $f'(t)$.

Zunächst ist $f'(t)$ zu bestimmen (Produkt- und Kettenregel):

$f'(t) = 1 \cdot e^{0,2t - 0,2} + (t + 10) \cdot e^{0,2t - 0,2} \cdot 0,2 = (1 + 0,2t + 2) \cdot e^{0,2t - 0,2}$

$f'(t) = (0,2t + 3) \cdot e^{0,2t - 0,2}$

Da sowohl $0,2t + 3$ als auch $e^{0,2t - 0,2}$ größer als Null ist für $t \geq 0$, gilt $f'(t) > 0$ und die Funktion f ist monoton steigend.

1.3 **Stochastik**

1.3.1 Bestimmen Sie anhand der obigen Abbildung jeweils dieWahrscheinlichkeit der Ereignisse A, B und C.

$P(A) = P(X \leq 6) \approx 0,59$

$P(B) = P(X = 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 3) \approx 0,15 - 0,05 = 0,1$

$P(C) = P(3 < X < 9) = P(X \leq 8) - P(X \leq 3) \approx 0,95 - 0,05 = 0,9$

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2024

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.4 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

1.4.1 Berechnen Sie die Mengen der einzelnen Plastiksorten, die zur Herstellung von 2 ME S_1 und 3 ME S_2 benötigt werden.

$$\begin{pmatrix} 100 & 150 \\ 90 & 140 \\ 150 & 240 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 650 \\ 600 \\ 1020 \end{pmatrix}$$

Es werden 650 ME von P_1, 600 ME von P_2 und 1020 ME von P_3 benötigt.

1.4.2 Ermitteln Sie die Lösung des Linearen Gleichungssystems, das zu der Matrizengleichung gehört, und erläutern Sie die Lösung im Sachzusammenhang.

$0a + 5c = 100 \Leftrightarrow c = 20$

$0a + 5d = 150 \Leftrightarrow d = 30$

$a + 4 \cdot 20 = 90 \Leftrightarrow a = 10$

$b + 4 \cdot 30 = 140 \Leftrightarrow b = 20$

Die berechneten Werte geben die Mengen der einzelnen Garne an, die zur Herstellung je einer ME der einzelnen Stoffe benötigt werden.

1.5 Wahlaufgabe Analysis

1.5.1 Zeigen Sie, dass für die Gleichung der Gewinnfunktion gilt: $G(x) = -20x^2 + 200x - 60$

Bestimmung der linearen Preis-Absatz-Funktion $p(x) = m \cdot x + b$:

Anhand der Tabelle ist der lineare Zusammenhang zwischen Preis und Menge direkt ersichtlich: $m = -20$, $b = 220$.

Somit ist $p(x) = -20x + 220$ und $E(x) = p(x) \cdot x = -20x^2 + 220x$.

Damit erhält man aus $G(x) = E(x) - K(x)$:

$G(x) = -20x^2 + 220x - (20x + 60) = -20x^2 + 200x - 60$.

1.5.2 Ermitteln Sie den Cournot'schen Punkt.

notw. Bed. Gewinnmaximum: $G'(x) = 0$

$G'(x) = -40x + 200 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

dazu hinreichend: $G'(x) = -40 < 0$

$p(5) = 120$

Damit ist der Cournot'sche Punkt $C(5\,|\,120)$.

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2024

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.6 Wahlaufgabe Analysis

1.6.1 Weisen Sie die Behauptung rechnerisch nach.

$f(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x^2$; $f'(x) = 3a \cdot x^2 - 2b \cdot x = x(3ax - 2b)$; $f''(x) = 6ax - 2b$

Berechnung der beiden Extremstellen:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2b}{3a}$

Berechnung der Wendestelle: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_W = \frac{2b}{6a}$

Da $x_W = \frac{2b}{6a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b}{3a}$ liegt die Wendestelle genau in der Mitte der beiden Extremstellen.

1.7 Wahlaufgabe Stochastik

1.7.1 Formulieren Sie im Sachzusammenhang jeweils eine Fragestellung, die zur entsprechenden Rechnung A, B und C führt.

A: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich von 10 gefundenen Flaschen genau 9 zum Upcycling eignen?

B: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die ersten neun gefundenen Flaschen zum Upcycling eignen, die letzte aber nicht? (Es gibt weitere Möglichkeiten.)

C: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich alle 10 gefundenen Flaschen zum Upcycling eignen?

1.8 Wahlaufgabe Lineare Algebra/Analytische Geometrie

1.8.1 Zeigen Sie: A ist eine orthogonale Matrix.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.8.2 Berechnen Sie, für welche Werte von t die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5t & 0 \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0{,}5t)^2 \end{pmatrix}$$

also muss gelten: $(0{,}5t^2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}5t = 1 \vee 0{,}5t = -1$

$t = 2 \vee t = -2$

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2024

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 2 – Analysis

2.1.1 Quadratische oder exponentielle Regression

Quadratische Regression: $f(t) = 32{,}95\,t^2 - 129{,}75\,t + 130{,}71$ mit $r^2 = 0{,}989$

Exponentielle Regression: $f(t) = 51{,}89 \cdot e^{0{,}37t}$ mit $r^2 = 0{,}994$

(Bestimmtheitsmaß r^2)

Da die exponentielle Funktion ein höheres Bestimmtheitsmaß hat, beschreibt sie die Situation besser.

2.1.2 Zeitpunkt, zu dem CleanUp voraussichtlich 5000 Tonnen Plastik pro Jahr sammelt.

Ansatz: $52 \cdot e^{0{,}37t} = 5000 \Leftrightarrow t \approx 12{,}34$

Zum Zeitpunkt 12,3 sammelt CleanUp voraussichtlich 5000 Tonnen Plastik pro Jahr.

2.2.1 Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes für den Parameterwert b = 2.

Gesucht ist das lokale Maximum der Funktion $a_b(t)$ für b = 2:

$a_2(t) = (0{,}8 \cdot t^2 + 16 \cdot t) \cdot e^{-0{,}4 \cdot t}$

notwendige Bedingung: $a_2'(t) = 0$

$a_2'(t) = (1{,}6t + 16) \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} + (0{,}8 \cdot t^2 + 16 \cdot t) \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} \cdot (-0{,}4)$

$a_2'(t) = (-0{,}32 \cdot t^2 - 4{,}8 \cdot t + 16) \cdot e^{-0{,}4 \cdot t}$ (mit Produkt - und Kettenregel)

$a_2'(t) = 0 \Leftrightarrow t \approx 2{,}81 \quad (t \geq 0)$

Der Absatz wird zum Zeitpunkt t = 2,8 maximal.

2.2.2 Untersuchung der Aussagen B1 und B2

B1: Die Behauptung ist wahr.

Bei t = 1,5 ist der Graph von a_5' positiv, d. h. der Absatz ist zu diesem Zeitpunkt ansteigend.

B2: Die Behauptung ist falsch.

Das lokale Minimum von a_5' liegt zeitlich gesehen vor dem von a_3'.

Somit liegt die Wendestelle zu a_5 auch vor der von a_3.

2.3.1 Bereich des Parameters a, für den die kurzfristige Preisuntergrenze unter dem Konkurrenzpreis liegt.

Zu bestimmen ist der Bereich für a mit der kurzfristigen Preisuntergrenze:

$k_a(x) = x^2 - ax + 130,\ a > 0$ (mit $0 < a < 15$).

notwendig und hinreichend bei ertragsgesetzlichem Verlauf:

$k_a'(x) = 2x - a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$ (Betriebsminimum)

kurzfristige Preisuntergrenze: $k_a(\frac{a}{2})$

$k_a(\frac{a}{2}) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 130 = -\frac{a^2}{4} + 130 < 121 \Leftrightarrow a > 6$

möglicher Bereich: $6 < a < 15$

Hinweis: Skizze von $y = -\frac{x^2}{4} + 130$ und $y = 121$; Schnitt bei x = 6