Ott | Rosner

Abiturprüfung in Mathematik

Analysis, Stochastik

Wahlgebiet: Matrizen, Prozesse

Berufliches Gymnasium

Baden-Württemberg

2022

mit Lernvideos

Schülergerechte Lösungen

Merkur Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * *

1. Auflage 2021

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0385-01
ISBN 978-3-8120-0385-8

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung dient zur Vorbereitung auf das **Abitur 2022** an beruflichen Gymnasien und ist auf die aktuelle Prüfungsordnung abgestimmt.

Für die Abiturprüfung 2022 gelten aufgrund der Pandemie besondere Vorgaben die den Ablauf und die prüfungsrelevanten Stoffgebiete betreffen.
Weitere Erläuterungen finden Sie auf den Seiten 5 und 6 und in einem ausführlichen Video.

Die Aufgaben sind nach den Prüfungsgebieten Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra gegliedert, was den Schülerinnen und Schülern ein gezieltes Üben ermöglicht.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Dem neuen Abiturmodus wird durch eine Vielzahl von Aufgaben für Teil 1, der ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss, und für die Teile 2 – 4, bei denen Hilfsmittel zugelassen sind, Rechnung getragen.
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich, um den beruflichen Gymnasien aller Richtungen gerecht zu werden.
Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Da die Aufgabensammlung allen Schülerinnen und Schülern bei der **selbstständigen** Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind von den Autoren zu allen Aufgaben ausführliche und schülergerechte Lösungen erstellt worden. An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Zur Unterstützung des Lernerfolges sind **alle Hauptprüfungen ab 2016/2017** in einigen **Lernvideos** aufgearbeitet.
In der Sprache der Abiturientinnen und Abiturienten werden alle Aufgabenteile ausführlich gelöst.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Abiturprüfung 2022 in Mathematik

www.mvurl.de/f337

Zu Beginn: SchülerIn erhält alle Aufgabenteile (1 bis 4), jedoch keine Hilfsmittel

Phase 1: Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils

Teil	Thema	Auswahl	Zeitrichtwert	Punkte
1	Analysis (50%) Stochastik (25%) Wahlgebiet: Vektorgeometrie/Matrizen (25%)	keine	90 min	30

Nach endgültiger Abgabe von Teil 1 erhält SchülerIn die Hilfsmittel

- SchülerIn erhält **eine Aufgabe** aus der Stochastik und **eine** aus dem Wahlgebiet. Die Lehrkraft wählt diese aus jeweils zwei Aufgaben aus.

Phase 2: Bearbeitung der Teile mit Hilfsmitteln (Taschenrechner + Merkhilfe)

Teil	Thema	Auswahl	Zeitrichtwert	Punkte
2	Analysis (ca. 67%)	keine	120 min	30
	Anwendungsorientierte Analysis (ca. 33%)	SchülerIn wählt **eine aus drei** Aufgaben		
3 4	**Entweder** Stochastik **oder** Vektorgeometrie/Matrizen	SchülerIn wählt **eine aus zwei** vorgelegten Aufgaben	60 min	15

Hinweise

- Die Prüfung dauert insgesamt maximal 270 Minuten.
  Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 75 Punkte.
- SchülerIn erhält **zwei Aufgaben entweder** aus der Stochastik oder aus dem Wahlgebiet (Vektorgeometrie oder Prozesse/Matrizen) vorgelegt. Die Auswahl (Stochastik oder Wahlgebiet) trifft die Lehrkraft

Aufgabenerstellung für die Abiturprüfung 2022 am Beruflichen Gymnasium
Prüfungsrelevante Stoffgebiete:
Schwerpunktmäßig beziehen sich die Aufgaben jeweils auf eine der entsprechenden Lehrplaneinheiten des Bildungsplans, in allen Aufgaben können aber auch Inhalte aus den anderen vier genannten LPE vorkommen:

Teil 1: Analysis
Stochastik
Lineare Algebra: Vektorgeometrie bzw. mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Teil 2: Analysis
Anwendungsorientierte Analysis

Teil 3: Stochastik

Teil 4: Lineare Algebra: Vektorgeometrie bzw. mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Prüfungsmodalitäten: Siehe Seite 5

Hinweise zu Teil 1:
Der Lehrkraft werden jeweils zwei Aufgaben aus der Stochastik und aus dem Wahlgebiet (entweder Vektorgeometrie oder Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen) vorgelegt. Die Lehrkraft wählt jeweils eine Aufgabe aus der Stochastik und eine Aufgabe aus dem Wahlgebiet aus.

Hinweise zu Teil 3 bzw. Teil 4:
Der Lehrkraft werden zwei Aufgaben aus der Stochastik und zwei Aufgaben aus dem Wahlgebiet (entweder Vektorgeometrie oder Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen) vorgelegt. Die Lehrkraft wählt entweder beide Aufgaben aus der Stochastik oder beide Aufgaben aus dem Wahlgebiet aus. Den Schülerinnen und Schüler werden diese zwei Aufgaben vorgelegt, davon wählen sie eine Aufgabe aus.
Für das Sachgebiet Analysis ist keine veränderte Auswahl vorgesehen.

Allgemeiner Hinweis:
Die Schülerinnen und Schüler erhalten alle Aufgabenteile zu Beginn der Prüfung. Dabei ist Teil 1 in einer Mappe und die Teile 2, und entweder Teil 3 oder Teil 4 in einer zweiten Mappe den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung zu stellen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die Aufgabenteile 2, 3 und 4 werden genau dann ausgegeben, wenn Teil 1 in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurden.

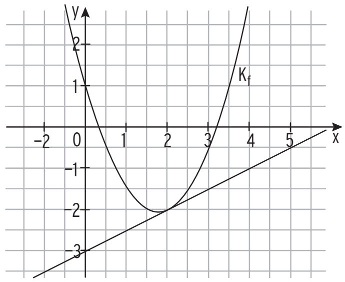
I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

1 Übungsaufgaben

1.1 Analysis Übungsaufgaben Lösungen Seite 22 - 24

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe 2

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 3

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1 \mid 1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von K in S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx$.
Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 7 **Lösungen Seite 24/25**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4e^{2x} - 2$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(0,5) = -1$.

Aufgabe 8

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt S(0|1) begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Aufgabe 9

Die täglichen Heizkosten eines Hauses werden durch k(t) dargestellt.

Dabei ist t die Zeit in Tagen seit dem 1. Januar des Jahres.

Was bedeutet $\int_0^{90} k(t)dt$ bzw. $\frac{1}{90}\int_0^{90} k(t)dt$?

Aufgabe 10

Die Entwicklung der Gesamtkosten der Produktion von Fahrrädern kann durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$ beschrieben werden.

Berechnen Sie das Minimum der variablen Stückkosten und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 11

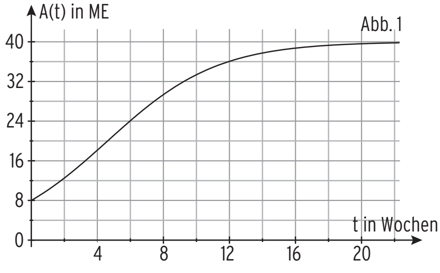
Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 12

Abb. 1 zeigt den Gesamtabsatz eines Produktes in den ersten 20 Wochen nach Einführung.

a) Erläutern Sie, wie sich der Gesamtabsatz langfristig entwickeln wird.

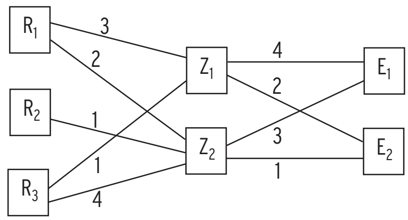
b) Bestimmen Sie in etwa den Zeitpunkt, an dem die momentane Änderungsrate maximal ist. Kennzeichnen Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung.



Aufgabe 14

Lösungen Seite 38

Bei einem zweistufigen Produktionsprozess wird der Bedarf je Mengeneinheit an Roh- und Zwischenprodukten für die Endprodukte in dem folgenden Verflechtungsdiagramm verdeutlicht.



Die Kosten für je eine Mengeneinheiten der Rohstoffe entsprechen dem Zeilenvektor (2 5 3).

1 Zeigen Sie, dass für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt: $C_{RE} = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}$.

2 Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung, dass die Rohstoffkosten für 10 ME von E_1 über 1000 GE betragen.

Aufgabe 15

Ein Unternehmen stellt aus drei unterschiedlichen Bauteilen B1, B2 und B3 die Endprodukte E1, E2 und E3 her. Das Unternehmen hat noch 70 ME von B1 und jeweils 60 ME von B2 und B3 auf Lager.

1 Die Materialverflechtung ist der Matrix M_{BE} zu entnehmen: $M_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie, wie viele ME der Endprodukte hergestellt werden können, wenn der Lagerbestand vollständig aufgebraucht werden soll.

2 Durch eine Veränderung der Produktion werden nun für die Herstellung von einer ME von E3 eine zusätzliche ME von B3 benötigt. Als umgeformte erweiterte Koeffizienten-Matrix ergibt sich bei obigen Lagerbeständen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 0 & 2 & 6 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Matrix im Sachzusammenhang.

Lösungen – Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Lösungen 1.1 Analysis Übungsaufgaben

Aufgabe 1 Aufgaben Seite 7

Die Abbildung zeigt eine Parabel K_f von f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Ableitung: $f'(x) = 2a \cdot x + b$

Bedingungen ablesen und LGS aufstellen: $f(0) = 1$ $\quad c = 1$

$f(2) = -2 \quad 4a + 2b + c = -2$

$f'(2) = \frac{1}{2} \quad 4a + b = \frac{1}{2}$

Einsetzen von $c = 1$ in $4a + 2b + c = -2$: $\quad 4a + 2b = -3$

$4a + b = \frac{1}{2} \quad | \cdot (-1)$ $\quad +$

Addition ergibt: $\quad b = -3{,}5$

Einsetzen in z. B. $4a + b = \frac{1}{2}$ ergibt $\quad 4a - 3{,}5 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$

Möglicher Funktionsterm $\quad f(x) = x^2 - 3{,}5x + 1$

Aufgabe 2

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$; Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$; $f''(x) = -6x + 6$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $\quad -6x + 6 = 0 \quad$ für $x = 1$

Mit $f'''(x) = -6 \neq 0$ ist $x = 1$ eine Wendestelle.

Mit $f(1) = -3$ ergibt sich der Wendepunkt $W(1 \mid -3)$.

Ansatz für die Tangente: $\quad y = mx + b$

$f'(1) = 2 = m$; Punktprobe mit W: $\quad -3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -5$

Gleichung der Tangente: $\quad y = 2x - 5$

Aufgabe 3

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen: $f(0) = 0 \quad d = 0$

$f'(0) = 0 \quad c = 0$

$H(1 \mid 1)$ der Hochpunkt: $f(1) = 1 \quad a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 0 \quad 3a + 2b + c = 0$

c und d eingesetzt: $\quad a + b = 1 \quad | \cdot 3$ $\quad +$

$3a + 2b = 0 \quad | \cdot (-1)$

Additionsverfahren: $\quad b = 3$

Einsetzen in $a + b = 1$ ergibt $\quad a = -2$

Funktionsterm: $\quad f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe 3 Aufgaben Seite 7

Alternative: Ansatz wegen Berühren in x = 0: $f(x) = ax^2(x - b) = ax^3 - abx^2$

H(1 | 1) der Hochpunkt: $f(1) = 1$ $a(1 - b) = 1$

$f'(x) = 3ax^2 - 2abx$ $f'(1) = 0$ $3a - 2ab = 0 \Rightarrow a(3 - 2b) = 0$

Wegen $a \neq 0$ folgt $(3 - 2b) = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

Eingesetzt in $a(1 - b) = 1$ ergibt $a \cdot (-\frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow a = -2$

Funktionsterm: $f(x) = -2x^2(x - \frac{3}{2})$ $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ (nicht verlangt)

Aufgabe 4

K: $f(x) = e^{x-3} - 2$; Ableitung: $f'(x) = e^{x-3}$

Ansatz für die Tangente: $y = mx + c$

Mit $f(3) = -1$ und $f'(3) = 1 = m$

erhält man mit durch einsetzen: $-1 = 1 \cdot 3 + c \Rightarrow c = -4$

Gleichung der Tangente: $y = x - 4$

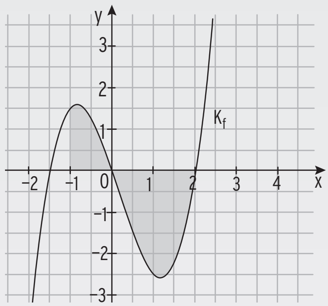
Die Asymptote hat die Gleichung $y = -2$.

Schnittpunkt von Tangente und Asymptote: $-2 = x - 4 \Rightarrow x = 2$

Koordinaten des Schnittpunktes: S(2 |− 2)

Aufgabe 5

$$\int_{-1}^{2}(x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$$
$$= 4 - \frac{4}{3} - 6 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{3}{2}\right)$$
$$= -2 - \frac{4}{3} - \frac{3 + 2 - 18}{12} = -\frac{27}{12}$$
$$= -2{,}25$$



(Flächenbilanz)

Das Flächenstück zwischen K_f und der x-Achse oberhalb der x-Achse ist um 2,25 kleiner als das Flächenstück zwischen K_f und de x-Achse unterhalb der x-Achse.

Aufgabe 6

Schnittstellen von f und g durch Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $-x^2 + 3 = 2x$

Nullform: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Lösung mit Formel: $x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_{1|2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$

Schnittstellen = Integrationsgrenzen: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$

Integration von − 3 bis 1 über f(x) − g(x): $\int_{-3}^{1}(f(x) - g(x))dx$

2 Aufgabensätze Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabensatz A **Teil 1 ohne Hilfsmittel** **Lösungen Seite 52/53**

(30 Punkte)

Analysis **Punkte**

1.1 Erläutern Sie anhand einer Skizze, ob das Integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx$ größer, kleiner oder gleich Null ist. 3

1.2 Für eine Funktion f gilt: 4

(1) $f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

(2) $f''(-2) = -3$

(3) $f''(1) = 3$

(4) $f(-2) = \frac{19}{3}$

(5) $f(1) = \frac{11}{6}$

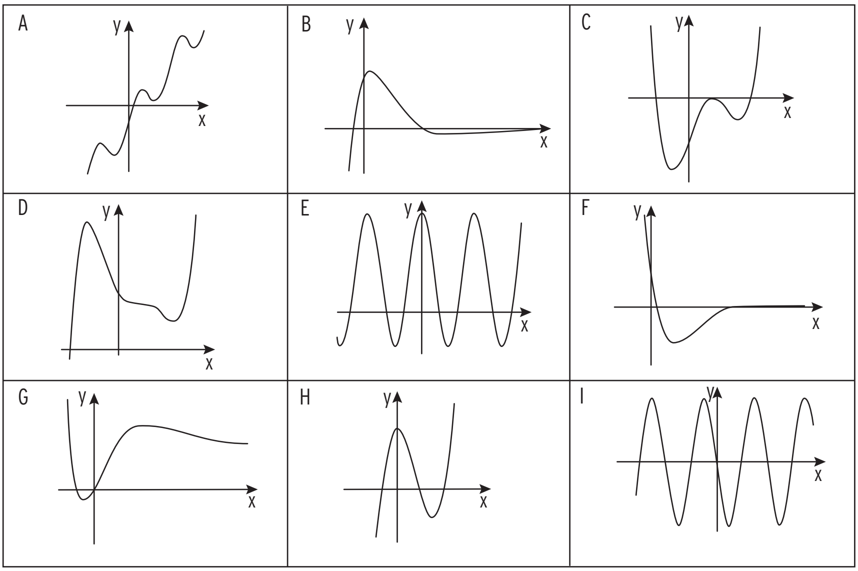
Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild von f treffen?

1.3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. 4

Geben Sie die Periode von f an.

Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $\cos(2x) = -1$.

1.4 Die Abbildungen zeigen Schaubilder von drei Funktionen sowie deren zugehörigen ersten und zweiten Ableitungen. Ordnen Sie jeweils dem Schaubild der Funktion das Schaubild ihrer ersten und zweiten Ableitung zu: 5



Aufgabensatz A Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik

Punkte

2.1 Eine Laplace-Münze wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal Zahl und einmal Bild? 2

2.2 Ein Würfel wird 20-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal die Augenzahl 3? Geben Sie eine Term an. 2

2.3 Bei einer Blutspendenaktion werden die Blutgruppen der Spender bestimmt. 2
Ein Ereignis ist: „In einer Gruppe von fünf Freunden hat niemand die Blutgruppe Null.“
Beschreiben Sie das Gegenereignis in Worten.

2.4 Die Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung: 2

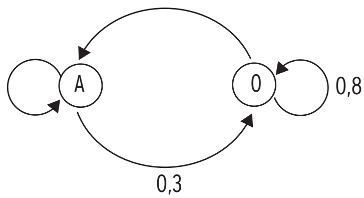
x_i	− 3	− 1	0	5
$P(X = x_i)$	0,2	u	w	0,2

Der Erwartungswert von X beträgt 0,2.

Berechnen Sie u und w.

Matrizen und Prozesse

3.1 Die Kunden eines Getränkemarktes kaufen wöchentlich eine der beiden Fruchtsaftspezialitäten Apfelsaft (A) oder Orangensaft (O). Das Übergangsdiagramm beschreibt das Kaufverhalten der Kunden von einer Woche zur folgenden Woche. 3
Man nimmt an, dass sich das Kaufverhalten auf Dauer nicht verändert.



Geben Sie die vollständige Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ 0,3 & \dots \end{pmatrix}$ an.

Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente der Hauptdiagonale von M^2.

3.2 Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$. 3

Lösen Sie die Matrizengleichung $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{0}$;

E ist hierbei die zugehörige Einheitsmatrix.

30

Aufgabensatz B Teil 1 ohne Hilfsmittel Lösungen Seite 54/55

Analysis **Punkte**

1.1 Lösen Sie die Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$. 3

1.2 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt. 3

Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist.

1.3 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f. 6

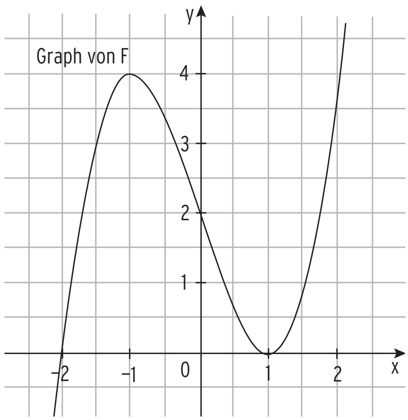
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$

(2) $\int_0^2 f(x)dx = 4$

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

(4) $f(F(-2)) > 0$



1.4 Gegeben ist die in ℝ definierte Funktion $f(x) = \sin(x)$. Es gilt $\int_0^{0,5\pi} f(x)dx = 1$.

1.4.1 Geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} f(x)dx$ an. 1

1.4.2 Begründen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion, dass 2

$\int_0^{5\pi} f(x)dx = 2$ gilt.

1.4.3 Beschreiben Sie, wie der Graph der in ℝ definierten Funktion h mit 3

$h(x) = 1 + 2\sin(4x)$ aus dem Graphen von f hervorgeht.

II Teil der Abiturprüfung mit Hilfsmittel

Übungsaufgaben

Teil 2 mit Hilfsmittel

Analysis – Anwendungsorientierte Analysis

Auszug aus der Merkhilfe

5 Analysis

Änderungsrate

Durchschnittliche / Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_1]$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Momentane / Lokale Änderungsrate (Ableitung) an der Stelle x_0 $\quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ableitungsregeln

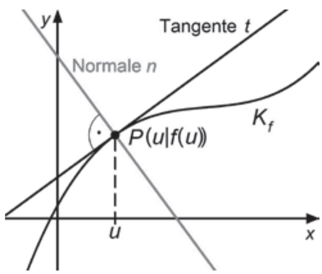
Summenregel	$f(x) = u(x)+v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x)+v'(x)$
Faktorregel	$f(x) = a \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x)+u(x) \cdot v'(x)$

Spezielle Ableitungen / Stammfunktionen mit $C \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^k$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$	$F(x) = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1}+C$ mit $k \neq -1$
$f(x) = e^{bx}$	$f'(x) = b \cdot e^{bx}$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot e^{bx}+C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin(bx)$	$f'(x) = b \cdot \cos(bx)$	$F(x) = -\frac{1}{b} \cdot \cos(bx)+C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(bx)$	$f'(x) = -b \cdot \sin(bx)$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot \sin(bx)+C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$

Tangente und Normale

Tangentensteigung	$m_t = f'(u)$
Tangentengleichung	$y = f'(u)(x-u)+f(u)$
Normalensteigung	$m_n = \frac{-1}{f'(u)}$
Normalengleichung	$y = \frac{-1}{f'(u)}(x-u)+f(u)$



Auszug aus der Merkhilfe

Merkhilfe Mathematik für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden-Württemberg

Untersuchung von Funktionen und ihren Schaubildern

Symmetrie	K_f ist symmetrisch zur y-Achse K_f ist symmetrisch zum Ursprung	$f(-x)=f(x)$ für alle x $f(-x)=-f(x)$ für alle x
Monotonie	f steigt monoton im Intervall J f fällt monoton im Intervall J	$f'(x)\geq 0$ im Intervall J $f'(x)\leq 0$ im Intervall J
Krümmung	K_f ist im Intervall J linksgekrümmt K_f ist im Intervall J rechtsgekrümmt	$f''(x)\geq 0$ im Intervall J $f''(x)\leq 0$ im Intervall J
Hochpunkt	K_f hat den Hochpunkt $H\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$	$f'(x_0)=0$ und VZW +/- von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0)<0$
Tiefpunkt	K_f hat den Tiefpunkt $T\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$	$f'(x_0)=0$ und VZW -/+ von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0)>0$
Wendepunkt	K_f hat den Wendepunkt $W\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$	$f''(x_0)=0$ und VZW von $f''(x)$ bei x_0 oder $f'''(x_0)\neq 0$

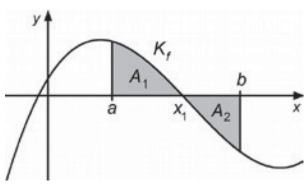
Berechnung bestimmter Integrale

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Flächenberechnung

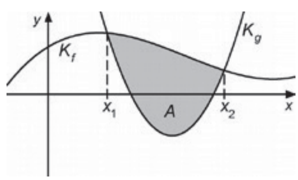
$$A_1 = \int_a^{x_1} f(x)\,dx$$

$$A_2 = -\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx$$



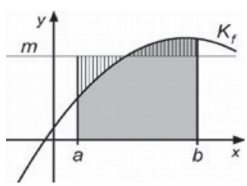
$$A = \int_{x_1}^{x_2} (f(x)-g(x))\,dx$$

falls $f(x)\geq g(x)$ für $x\in[x_1; x_2]$



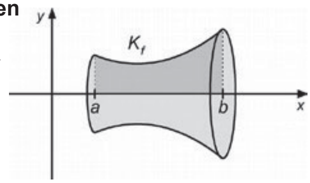
Mittelwert

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



Rotationsvolumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$$



Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 96/97**

Punkte

1.1 Das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades geht durch den Punkt $S(0 \mid 2)$ und hat den Wendepunkt $W(1 \mid \frac{31}{12})$. Die Normale im Punkt $P(-3 \mid \frac{5}{4})$ hat die Steigung $\frac{1}{5}$. 5

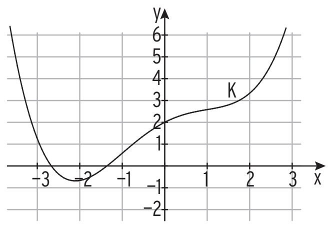
Stellen Sie ein LGS zur Bestimmung des Funktionsterms auf.

1.2 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2;\ x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f heißt K .

1.2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K. 6

Zeigen Sie: Die Tangente an K im Schnittpunkt mit der y-Achse ist parallel zu der Geraden durch die Wendepunkte.



1.2.2 Die Gerade mit der Gleichung $y = x + 2$ schließt mit K zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie den Inhalt eines der beiden Flächenstücke. 6

Markieren Sie die berechnete Fläche in einer Skizze.

1.3 C ist das Schaubild der Funktion h mit

$$h(x) = 3\sin(x - 3);\ x \in \mathbb{R}.$$

Wie entsteht das Schaubild C aus dem Schaubild der Funktion k mit $k(x) = \sin(x)$? 5

Geben Sie zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, einen Hoch- und einen Tiefpunkt von C an.

20

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis
Aufgabe 2

Lösungen Seite 97/98

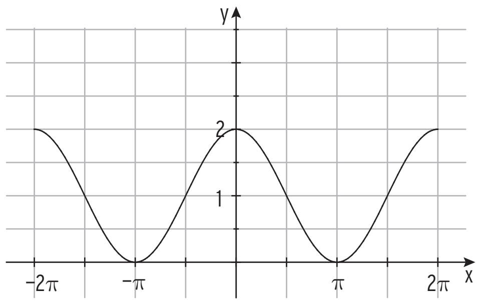
Punkte

2.1 Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 3e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

2.1.1 Das Schaubild von g, die beiden Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 2{,}5$ begrenzen eine Fläche. Zeigen Sie, für den Inhalt dieser Fläche gilt $A = 3 - 3 \cdot e^{-2,5}$. 4

2.1.2 Die Fläche aus 2.1.1 rotiert um die x-Achse. Dabei entsteht ein Rotationskörper. Der Rotationskörper wird so durchbohrt, dass die Bohrachse mit seiner Symmetrieachse übereinstimmt. Diese Bohrung hat den Durchmesser 1. Welches Volumen hat der Restkörper? 6

2.2 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f mit $-2\pi < x < 2\pi$.



2.2.1 Begründen Sie anhand der Abbildung, welche der folgenden Aussagen falsch oder wahr sind. 5

- f ist monoton steigend.
- Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
- Das Schaubild von f hat in $P(\frac{\pi}{2} \mid f(\frac{\pi}{2}))$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

2.2.2 Geben Sie einen Funktionsterm von f' an. 5

Die Schaubilder von f und f' schneiden sich auf der y-Achse.

Bestimmen Sie f(x).

$\overline{20}$

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Anwendungsorientierte Analysis

Aufgabe 1 Lösungen Seite 107

Punkte

1 Eine Flüssigkeit wird auf 90 °C erhitzt. Dann lässt man sie bei einer Umgebungstemperatur von 20 °C abkühlen. Bei diesem Experiment erhält man folgende Messreihe:

Zeit t in Minuten	0	1	2	3	4	5	6	7
Temperatur in °C	90	58	40	31	26	22	22	21

Die Gleichung einer quadratischen Regressionskurve lautet

$y = 2{,}298t^2 - 24{,}679t + 84{,}917$.

1.1 Stellen Sie die Messdaten in einem Koordinatensystem dar. 6

Berechnen Sie die Gleichung einer exponentiellen Regressionskurve so, dass die Umgebungstemperatur nicht unterschritten wird.

Zeichnen Sie die Regressionskurve in das Koordinatensystem ein.

Vergleichen Sie die beiden Regressionen.

1.2 In eine Tasse wird 90 °C heißer Tee eingeschenkt. Der Tee kühlt auf die Zimmertemperatur von 20 °C ab.

Die Funktion h mit $h(t) = 20 + 70 \cdot e^{-0{,}2t}$ beschreibt diesen Abkühlvorgang.

Dabei ist t die Zeit in Minuten und h(t) die Temperatur in °C.

1.2.1 Berechnen Sie die Zeit, die vergeht, bis der Tee auf Trinktemperatur (50 °C) abgekühlt ist. 2

1.2.2 Berechnen Sie die momentane Abkühlgeschwindigkeit nach 1 Minute und nach 10 Minuten. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. 2

$\overline{10}$

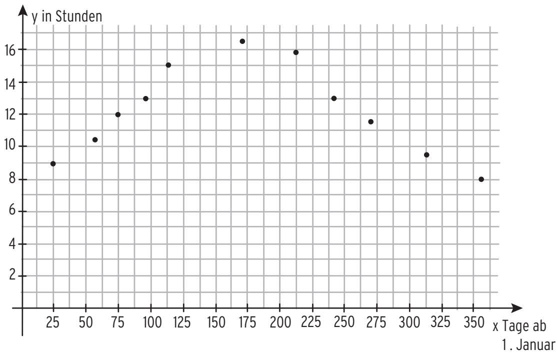
Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Anwendungsorientierte Analysis

Aufgabe 2 Lösungen Seite 108

Punkte

2 Im Verlauf eines Jahres (365 Tage) ändert sich aufgrund der geneigten Erdachse die astronomische Sonnenscheindauer, d. h. die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang.
In unseren Breiten ist die Sonne am 21. Juni mit ca. 16,5 Stunden am längsten und am 21. Dezember mit ca. 8 Stunden am kürzesten zu sehen.



2.1 Die Messergebnisse sollen durch eine trigonometrische Funktion modelliert werden. Geben Sie einen geeigneten Funktionsterm an. 6

2.2 Tina und Tom haben jeweils einen Funktionsterm bestimmt. 4
Tina hat die Daten durch eine quadratische Regression mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}8745$, Tom durch eine Regression 4. Grades mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}9784$ angenähert.
Bewerten Sie die Güte der beiden Näherungsfunktionen.
Kann man mithilfe Toms Näherungsfunktion die astronomische Sonnenscheindauer im nächsten Jahr vorhersagen?
Begründen Sie Ihre Antwort.

10

Mathematatik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: **Matrizen und Prozesse**

Merkhilfe Mathematik für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden-Württemberg

8 Matrizen

Addition

Man kann Matrizen nur addieren, wenn sie in ihrer Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ können nur dann miteinander multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl von $\boldsymbol{A}$ mit der Zeilenanzahl von $\boldsymbol{B}$ übereinstimmt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen gilt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$

Einheitsmatrix

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}$$

Inverse Matrix

Für eine invertierbare Matrix $\boldsymbol{A}$ und ihre Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ gilt: $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$

Potenz einer Matrix

Für eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ gilt: $\boldsymbol{A}^n = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{A}}_{n \text{ Faktoren}}$

Merkhilfe Mathematik für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden-Württemberg

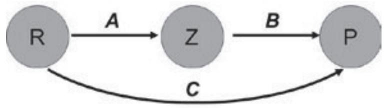
Produktionsprozesse

Ausgangszustand R; Zwischenzustand Z; Endzustand P

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix ***A***

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix ***B***

Rohstoff-Endprodukt-Matrix ***C***



Verbrauchs- und Produktionsvektoren

Rohstoffe $\vec{r}$, Zwischenprodukte $\vec{z}$, Endprodukte $\vec{p}$

$\vec{r} = \boldsymbol{A}\cdot\vec{z}$ $\quad$ $\vec{z} = \boldsymbol{B}\cdot\vec{p}$ $\quad$ $\vec{r} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\vec{p} = \boldsymbol{C}\cdot\vec{p}$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Mengeneinheit)

Materialkosten $\overrightarrow{k_R}$, Fertigungskosten der Zwischenprodukte $\overrightarrow{k_Z}$,
Fertigungskosten der Endprodukte $\overrightarrow{k_P}$

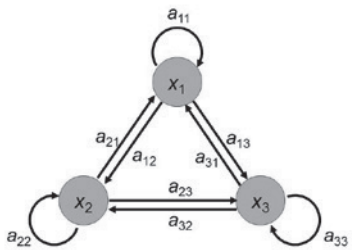
variable Herstellkosten (pro Mengeneinheit eines Endproduktes) $\overrightarrow{k_v} = \overrightarrow{k_R}\cdot\boldsymbol{C} + \overrightarrow{k_Z}\cdot\boldsymbol{B} + \overrightarrow{k_P}$

Gesamtkosten $K = \overrightarrow{k_v}\cdot\vec{p} + K_{fix}$

Übergangsprozesse

Übergangsmatrix zum nebenstehenden Übergangsgraph

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Stochastische Matrix $\quad$ alle Elemente nicht negativ und Spaltensummen gleich 1

Aus Verteilung $\vec{x}$ wird Verteilung $\vec{y}$ $\quad$ $\boldsymbol{A}\cdot\vec{x} = \boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{y}$

Stabilitätsvektor $\vec{x}$ $\quad$ $\boldsymbol{A}\cdot\vec{x} = \vec{x}$

Zyklischer Prozess $\quad$ $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{E}$ für ein $k > 1$

Mathematatik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 118**

Punkte

1 Im April ist das Wetter am Bodensee äußerst wechselhaft. Erfahrungsgemäß folgt auf einen überwiegend regnerischen Tag (R) mit 10 % Wahrscheinlichkeit ein überwiegend sonniger Tag (S) und mit 30 % Wahrscheinlichkeit ein überwiegend trüber Tag (T). Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag oder aber ein Regentag folgt, ist ebenfalls jeweils 30 %. Auf einen trüben Tag folgt mit 70 % Wahrscheinlichkeit ein Regentag, und mit 20 % Wahrscheinlichkeit bleibt es trübe.

1.1 Veranschaulichen Sie diese Informationen in einem Übergangsgraphen und ergänzen Sie die fehlenden Angaben. 5

1.2 Ein Online-Wetterdienst sagt für den 1. April 2016 für die Bodenseeregion voraus, dass es mit 30 % Wahrscheinlichkeit regnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die drei möglichen Wetterzustände am 2. April 2016, wenn der Online-Wetterdienst auch noch für den 1. April 2016 voraussagt, dass es mit 20 % Wahrscheinlichkeit sonnig ist. 5

2 Auf einer Mittelmeerinsel gilt für die drei Wetterzustände R, S und T im Juli die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

2.1 Interpretieren Sie die zweite Spalte dieser Matrix. 2

2.2 Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung, dass auf dieser Insel ungewöhnlich stabile Wetterverhältnisse herrschen. 3

$\overline{15}$

III Musteraufgabensätze zur Abiturprüfung

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG

ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM IM SCHULJAHR 2020/2021

Hauptprüfung	AUFGABEN FÜR DAS FACH
2.5.1	Mathematik (AG, BTG, EG, SGG, WG)

Arbeitszeit	240 Minuten
Hilfsmittel	**Teil 1:** Keine Hilfsmittel zugelassen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die nachstehenden Aufgaben bekommt die Schülerin/der Schüler genau dann, wenn sie/er den ersten Teil unwiderruflich abgegeben hat. **Teil 2, Teil 3 und Teil 4:** Merkhilfe sowie eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner sind zugelassen.
Stoffgebiet	**Teil 1** Pflichtteile Analysis und Stochastik (je 1 Aufgabe) Wahlgebiete aus der Lineare Algebra: Vektorgeometrie (1 Aufgabe) oder Matrizen (1 Aufgabe) — S. 2 - 8 **Teil 2** Analysis (1 Aufgabe) — S. 9 Anwendungsorientierte Analysis (3 Aufgaben) — S. 10 – 12 **Teil 3** Stochastik (2 Aufgaben) — S. 13 – 14 **Teil 4** Lineare Algebra: Vektorgeometrie (2 Aufgaben) — S. 15 – 16 Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen (2 Aufgaben); 1 Arbeitsblatt — S. 17 – 19
Bemerkungen	In Teil 1 wählt die Fachlehrerin/der Fachlehrer zu dem Pflichtteil Analysis jeweils eine Aufgabe aus dem Pflichtteil Stochastik und eine Aufgabe aus dem unterrichteten Wahlgebiet aus. Es sind **alle drei** vorgelegten Aufgaben zu bearbeiten. In Teil 2 ist die Aufgabe 1 zu bearbeiten. Aus den Aufgaben 2, 3 und 4 wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. Die Fachlehrerin/der Fachlehrer wählt entweder beide Aufgaben aus der Stochastik (Teil 3) oder beide Aufgaben aus dem unterrichteten Wahlgebiet (Teil 4) aus. Den Schülerinnen und Schülern werden diese beiden Aufgaben vorgelegt. Davon wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. Sie sind verpflichtet, jeden Aufgabensatz umgehend auf seine Vollständigkeit zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Blatt zu beginnen. Bei Verstößen gegen die angemessene Darstellungsform kann ein Punkteabzug erfolgen.

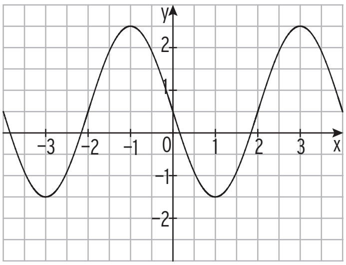
Aufgabensatz 1 **Lösungen Seite 142 - 153**

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

Punkte

1.1 Gegeben ist das folgende Schaubild einer Funktion: 6



Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = 0$ ist negativ.

b) Der Funktionswert an der Stelle $x = -2$ ist positiv.

c) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = -3$ ist null.

d) Der Wert der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 3$ ist positiv.

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 6x;\ x \in \mathbb{R}$. 4
Berechnen Sie, an welchen Stellen das zugehörige Schaubild K eine waagerechte Tangente aufweist.

1.3 Die Funktion g hat die Eigenschaften: $g(3) = 0$ und $\int_0^6 g(x)dx = 0$ 4
Skizzieren Sie ein mögliches Schaubild von g und begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

1.4 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, verläuft durch den Punkt $S(0 \mid 3)$ und hat in $T(3 \mid 0)$ einen Tiefpunkt. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm an. 3

Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

2 Stochastik **Punkte**

Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben.

2.1 Gib für die folgenden Ereignisse A, B und C jeweils einen Term an, der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Abhängigkeit von p beschreibt. 3

A: „Der Biathlet trifft bei genau vier Schüssen."

B: „Der Biathlet trifft nur bei den ersten beiden Schüssen."

C: „Der Biathlet trifft bei höchstens vier Schüssen."

2.2 Erläutere anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird. 2

3 Lineare Algebra: Prozesse und Matrizen

3.1 Die monatliche Entwicklung einer Population mit den drei Stufen S_1, S_2 und S_3 wird beschrieben durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.1.1 Zeichnen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm 1

3.1.2 Zeigen Sie, dass sich die Verteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$ von Monat zu Monat wiederholt. 2

3.1.3 Tim: „Es liegt also eine zyklische Populationsentwicklung mit einem einmonatigen Zyklus vor." Beurteilen Sie diese Aussage. 2

3.2 Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems. 3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 18 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

30

Aufgabensatz 1

Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1

Analysis	**Punkte**
1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{x-1} - x$; $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild der Funktion f heißt K.	
1.1 Zeichnen Sie das Schaubild K in ein Koordinatensystem ein. Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an und zeichnen Sie diese ebenfalls ein.	5
1.2 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte.	4
1.3 Das Schaubild K und die 2. Winkelhalbierende schließen mit der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = a$ für $a < 0$ eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a. Gegen welchen Wert strebt dieser Flächeninhalt für $a \to -\infty$?	4
2.1 Das zur y-Achse symmetrische Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades schneidet die y-Achse im Punkt $S(0\|2)$, es hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung -4 und einen Extrempunkt an der Stelle $x = \sqrt{2}$. Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.	4
2.2 Zeigen Sie: Die Wendestelle einer Polynomfunktion 3. Grades liegt bei $x = -2$, wenn die Koeffizienten von x^3 und x^2 das Verhältnis $1:6$ haben.	3

Lösungen Musteraufgabensätze zur Abiturprüfung

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe Seite 124

1 Analysis

1.1

a) Aussage wahr. Bei x = 0 fällt die Kurve.

b) Aussage wahr. Bei x = −2 befindet sich das Schaubild oberhalb der x-Achse.

c) Aussage wahr. Bei x = −3 hat das Schaubild einen Tiefpunkt mit Steigung 0.

d) Aussage falsch. Bei x = 3 ist das Schaubild rechtsgekrümmt, daher hat die zweite Ableitung hier einen negativen Wert.

1.2 $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 6x;\ x \in \mathbb{R};\ f'(x) = x^4 + x^2 - 6$

Stellen mit waagerechter Tangente

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\qquad x^4 + x^2 - 6 = 0$

Substitution: $(u = x^2)$ $\qquad u^2 + u - 6 = 0$

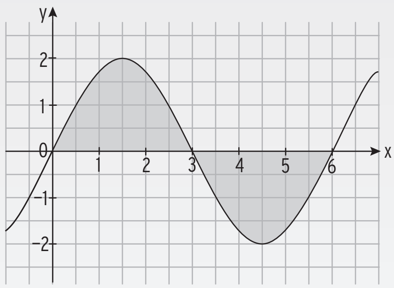
Lösungen in u: $\qquad u_{1|2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$

Lösungen der Gleichung in u: $\qquad u_1 = 2;\ \ u_2 = -3$

Lösungen in x: $\qquad u_1 = 2 \Rightarrow x_{1|2} = \pm\sqrt{2}$

Bei $x_{1|2} = \pm\sqrt{2}$ weist das Schaubild eine waagerechte Tangente auf.

1.3 $g(3) = 0$: Das Schaubild muss in x = 3 einen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse aufweisen.



$\int_0^6 g(x)dx = 0$: Die „Flächenbilanz“ muss Null ergeben, d.h. die Inhalte der Flächen zwischen Schaubild und x-Achse müssen ober- und unterhalb der x-Achse gleich groß sein.

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.4 Aufgrund der Symmetrie zur y-Achse wird eine Kosinusfunktion verwendet:

$f(x) = a \cdot \cos(k \cdot x) + b$

Diese weist den Hochpunkt S(0 | 3) und den Tiefpunkt T (3 | 0) auf.
Man erhält:
Amplitude: $a = \frac{y_H - y_T}{2} = \frac{3-0}{2} = \frac{3}{2}$
Mittellinie: $b = \frac{y_H + y_T}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$
Zwischen dem Hoch- und Tiefpunkt liegt eine halbe Periodenlänge.

Die Periodenlänge p = 6 führt auf $k = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Möglicher Funktionsterm: $f(x) = \frac{3}{2}\cos(\frac{\pi}{3}x) + \frac{3}{2}$

2 Stochastik

Aufgabe Seite 125

2.1 X: Anzahl der Treffer, X ist $B_{5;\,p}$-verteilt

$P(A) = P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^1 = 5 \cdot p^4 \cdot (1-p)$ mit $\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5$

$P(B) = p^2 \cdot (1-p)^3$ (Reihenfolge ist festgelegt)

$P(C) = P(X \leq 4) = 1 - P(5 \text{ Treffer}) = 1 - p^5$

2.2 Eine Voraussetzung für eine Bernoullikette ist eine konstante Trefferwahrscheinlichkeit des Schützen. Dies ist in der Realität nicht gegeben, da der Biathlet beim ersten Schuss beispielsweise noch einen erhöhten Puls hat und damit möglicherweise eine geringere Trefferwahrscheinlichkeit. Zudem ist die Trefferwahrscheinlichkeit auch stets vom Wind abhängig, der sich permanent ändert.

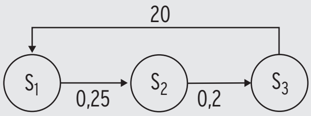
Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

3 Matrizen und Prozesse

Aufgabe Seite 125

3.1.1 Übergangsdiagramm



3.1.2 Für eine stationäre Verteilung gilt $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Berechnung von $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$

Es gilt $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Somit wiederholt sich die gegebene Verteilung von Monat zu Monat.

3.1.3 Es gilt: $0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 20 = 1$.

Somit liegt hier eine zyklische Population mit
einem dreimonatigen und nicht mit einem einmonatigen Zyklus vor.
Jede beliebige Startverteilung wiederholt sich nach drei Monaten.

Nur bestimmte Verteilungen, beispielsweise $\begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$, wiederholen sich monatlich.

3.2 Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems in Matrixform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Man erhält eine „Nullzeile“, ein Parameter ist frei wählbar. Das lineare Gleichungssystem ist also mehrdeutig lösbar (besitzt unendlich viele Lösungen).

IV Abiturprüfungen am beruflichen Gymnasium
Hauptprüfung 2016/2017

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Lösungen Seite 176 - 183**

1 Analysis **Punkte**

1.1 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$ an. 2

1.2 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen: 2

$g'(3) = 2$
$g''(3) = 0$
$g'''(3) \neq 0$
Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen?

1.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2 \cdot x} - 4 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat. 3

1.3.2 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt P(0 | 5) verläuft. 3

1.4 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = \cos(x);\ x \in \mathbb{R}$.

1.4.1 Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 1$ 3

Bestimmen Sie, ohne Verwendung einer Stammfunktion, zwei

verschiedene Werte für a, sodass gilt:

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 2$$

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

1.4.2 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit 2
$q(x) = -\cos(x + 2);\ x \in \mathbb{R}$
aus dem Schaubild von p hervorgeht.

15

Hauptprüfung 2016/2017 Teil 1 ohne Hilfsmittel

2 Stochastik — Punkte

2.1 Ein Experiment gelingt in 50 % aller Fälle. — 3

Prüfen Sie, ob das Experiment bei viermaliger Durchführung mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einmal gelingt.

2.2 A und B sind beliebige Ereignisse. — 4

Die Wahrscheinlichkeit, dass weder das Ereignis A noch das Ereignis B eintritt, beträgt 42%. Die Wahrscheinlichkeit, dass A und das Gegenereignis von B eintritt, beträgt 28%. Die Wahrscheinlichkeit, dass B und das Gegenereignis von A eintritt, beträgt 18%.

Zeigen Sie: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$. — 7

3 Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen — Punkte

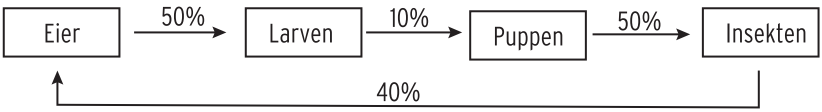
3.1 Lösen Sie das nachfolgende lineare Gleichungssystem. — 3

$$\begin{aligned} 2\cdot x - 3\cdot y + z &= 4 \\ -x + y + z &= 1 \\ 2\cdot y + 3\cdot z &= 6 \end{aligned}$$

3.2 In der Matrizengleichung $A \cdot B = C$ hat die Matrix A zwei Zeilen und vier Spalten. Die Matrix C ist eine quadratische Matrix. — 2

Wie viele Zeilen und Spalten hat die Matrix B?

3.3 Die Entwicklung einer Insektenpopulation wird durch folgendes Diagramm modelliert: — 3



Aus 50% der Eier werden Larven, von denen sich 10% verpuppen.
Aus 50% der Puppen schlüpfen die geschlechtsreifen Insekten, die pro Insekt 40 Eier legen und anschließend sterben.
Vereinfachend wird angenommen, dass jedes dieser vier Entwicklungsstadien jeweils 40 Tage benötigt.
Zu Beginn zählt man 10000 Eier, 4000 Larven, 600 Puppen und 300 Insekten.
Wie viele Eier, Larven, Puppen und Insekten zählt man nach diesem Modell nach 40 Tagen? Begründen Sie, warum die Population nach dem obigen Modell nicht ausstirbt.

8

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis **Punkte**

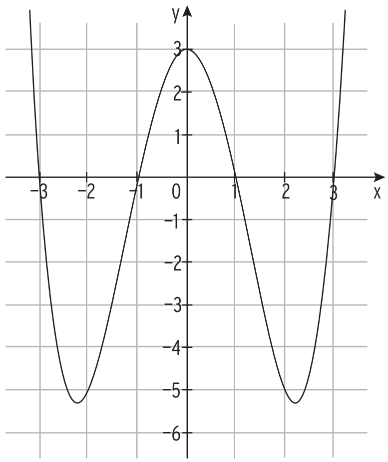
1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + 1$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1.1 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte und Wendepunkte. 8
Zeichnen Sie K.

1.1.2 Das Schaubild K, die Tangente an K an der Stelle $x = -1$ und die y-Achse schließen im zweiten Quadranten eine Fläche ein. 5
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

1.1.3 Für einen positiven Wert von m hat das Schaubild der Funktion g 3
mit $g(x) = 0{,}5 \cdot x^4 + x^3 + x^2 + m \cdot x + 2$; $x \in \mathbb{R}$,
genau einen gemeinsamen Punkt mit K.
Bestimmen Sie diesen Wert von m.

1.2 C ist das Schaubild eine Funktion h. 4
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion h′.



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen für den abgebildeten Bereich wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Das Schaubild C hat den Tiefpunkt $T(1 \mid h(1))$.

(2) Es gibt Punkte, an denen C eine Normale mit Steigung $\frac{1}{6}$ hat.

20

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

Im Verlauf von etwa 30 Tagen ändert der Mond ständig sein Erscheinungsbild (siehe Abbildung).

Der beleuchtete Anteil der erdzugewandten Seite des Mondes wird modellhaft durch die Funktion A mit

$A(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{15} \cdot t);\ 0 \leq t \leq 30,$

beschrieben. Dabei steht t für die Tage seit Beobachtungsbeginn, beispielsweise ist t = 1 das Ende des ersten Tages.

2.1 Skizzieren Sie das Schaubild von A. 4

Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Frage, die durch Lösen der Gleichung A(t) = 0,95 beantwortet werden kann.

2.2 Ermitteln Sie den durchschnittlichen Anteil, der von Beobachtungsbeginn bis zum Ende des fünfzehnten Tages beleuchtet wird. 4

2.3 Das Modell A soll nun zu einem Modell B abgeändert werden, sodass der Zeitpunkt t = 0 der Beleuchtung bei Vollmond entspricht. 2

Bestimmen Sie hierzu einen Wert für c, sodass die Funktion B mit

$B(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{15} \cdot t + c);\ 0 \leq t \leq 30,$

diesen Sachverhalt modelliert.

$\overline{10}$

Lösungen Hauptprüfung 2016/2017

www.mvurl.de/i4f2

Lösungen Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.1 Nullstellen von f: $f(x) = 0$ $\quad 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x = 0$
Ausklammern: $\quad 3x(x^2 - 9) = 0$
Satz vom Nullprodukt: $\quad 3x = 0$ oder $x^2 - 9 = 0$
Nullstellen: $\quad x = 0 \vee x = \pm 3$

1.2 $g'(3) = 2$ Die Steigung der Tangente an das Schaubild von g an der Stelle $x = 3$ ist 2.
$g''(3) = 0;\ g'''(3) \neq 0$ Das Schaubild der Funktion g hat einen Wendepunkt an der Stelle $x = 3$.

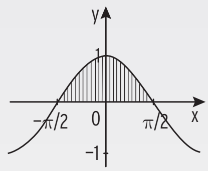
1.3 $h(x) = e^{2x} - 4 \cdot x;\ h'(x) = 2e^{2x} - 4$

1.3.1 Punkt mit waagrechter Tangente: $h'(x) = 0$ $\quad 2e^{2x} - 4 = 0$
$e^{2x} = 2$
Logarithmieren: $\quad 2x = \ln(2)$, also $x = \frac{1}{2}\ln(2)$
y-Wert: $h(\frac{1}{2}\ln(2)) = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2}\ln(2) = 2 - 2\ln(2)$
Gesuchter Punkt $(\frac{1}{2}\ln(2) \mid 2 - 2\ln(2))$

1.3.2 Stammfunktion von h: $\quad H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$
durch $P(0 \mid 5)$: $\quad H(0) = \frac{1}{2}e^{0} + c = 5$ für $c = 4{,}5$
Gesuchte Stammfunktion: $\quad H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot x^2 + 4{,}5;\ x \in \mathbb{R}$

1.4.1 Der Wert des Integrals entspricht dem Inhalt der Fläche, die vom Schaubild von p, der y-Achse und der x-Achse im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ umrandet wird.

Skizze:



$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 2$ für $a = -\frac{\pi}{2}$
(wegen der Achsensymmetrie zur y-Achse)

oder für $a = -\frac{5}{2} \cdot \pi$ oder für $a = -\frac{9}{2} \cdot \pi$

($\int_0^{2\pi} \cos(x)dx = 0$; Integral über eine Periode ergibt den Wert 0)

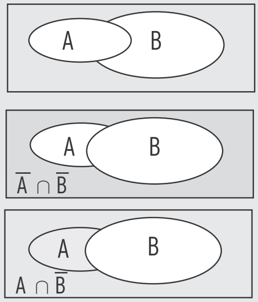
1.4.2 Das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x + 2);\ x \in \mathbb{R}$
geht aus dem Schaubild von p hervor durch
- Verschiebung des Schaubildes von p um 2 nach links
- Spiegelung an der x-Achse

Lösungen Teil 1 ohne Hilfsmittel Stochastik

www.mvurl.de/6fux

2.1 Ein Experiment gelingt in 50 % aller Fälle: p = 0,5
viermalige Durchführung: n = 4; X: Anzahl der Treffer
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}5^4 = 1 - \frac{1}{16} < 1 - \frac{1}{20} = 0{,}95$
Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment bei 4-maliger Durchführung mindestens einmal gelingt, nicht mehr als 95 %.

2.2 $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}42$; $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}28$; $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}18$



$P(A \cap B) = 1 - (P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)) = 0{,}12$

$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0{,}40 = 40\ \%$
$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0{,}30 = 30\ \%$

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 = P(A \cap B)$

Alternative mit einer Vierfeldertafel:

	B	$\overline{B}$	
A	**0,12**	*0,28*	0,40
$\overline{A}$	*0,18*	*0,42*	0,60
	0,30	0,70	1

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 = P(A \cap B)$

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$

Umformung in die Diagonalform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{array}\right)$

Lösung: x = 1; y = 0; z = 2

3.2 A ist eine 2; 4-Matrix; B muss 4 Zeilen haben. A · B = C ist eine quadratische Matrix; also ist B eine Matrix mit 4 Zeilen und zwei Spalten.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 22 & 7 \end{pmatrix}$

3.3 Insektenpopulationsmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

www.mvurl.de/ts8i

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10000 \\ 4000 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12000 \\ 5000 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$

Nach 40 Tagen zählt man 12000 Eier, 5000 Larven, 400 Puppen und 300 Insekten. Wegen $0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 40 = 1$ entwickelt sich die Population nach dem obigen Modell zyklisch und damit stirbt die Population nicht aus.

Lösungen Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel - Aufgabe 1

Analysis

www.mvurl.de/2rl4

1.1 K: $f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + 1;\ x \in \mathbb{R}$

Ableitungen: $f'(x) = 2x^3 + 3x^2$; $f''(x) = 6x^2 + 6x$; $f'''(x) = 12x + 6$

1.1.1 Extrempunkte

Bedingung: $f'(x) = 0$ — $2x^3 + 3x^2 = x^2(2x + 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt ergibt: $x_{1|2} = 0;\ x_3 = -1{,}5$

Mit $f''(-1{,}5) = 4{,}5 > 0$

und $f(-1{,}5) = 0{,}15625$ — $T(-1{,}5 \mid 0{,}15625)$

In $x = 0$ liegt kein Extrempunkt vor, da $f'(x)$ dort das Vorzeichen nicht wechselt ($x_{1|2} = 0$ ist doppelte Nullstelle von f', siehe auch Wendestelle)

Wendepunkte

Bedingung: $f''(x) = 0$ — $6x^2 + 6x = 6x(x + 1) = 0$

Satz vom Nullprodukt ergibt: $x_1 = 0;\ x_2 = -1$

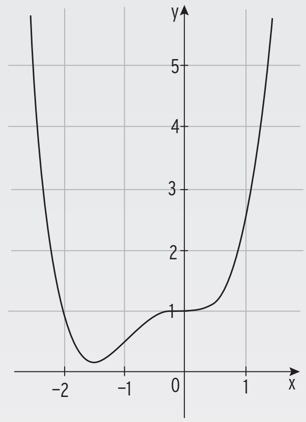
Mit $f'''(0) = 6 \neq 0$

und $f(0) = 1$: $W_1(0 \mid 1)$

Mit $f'''(-1) = -6 \neq 0$

und $f(-1) = 0{,}5$: $W_2(-1 \mid 0{,}5)$

Schaubild K:



1.1.2 Tangente an K an der Stelle $x = -1$

$f'(-1) = 1$; $W_2(-1 \mid 0{,}5)$

t: $y = 1 \cdot x + b$

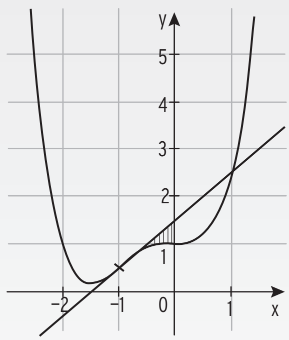
Punktprobe mit W_2 ergibt: $y = x + 1{,}5$

Fläche zwischen K, t in den Grenzen -1 und 0

$$\int_{-1}^{0} (x + 1{,}5 - f(x))\,dx = \int_{-1}^{0} (-0{,}5x^4 - x^3 + x + 0{,}5)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0} = 0{,}15$$

Inhalt dieser Fläche A = 0,15 (FE)



Abiturprüfungen am beruflichen Gymnasium
Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel Aufgabe 1 **Lösungen Seite 260 - 272**

Analysis **Punkte**

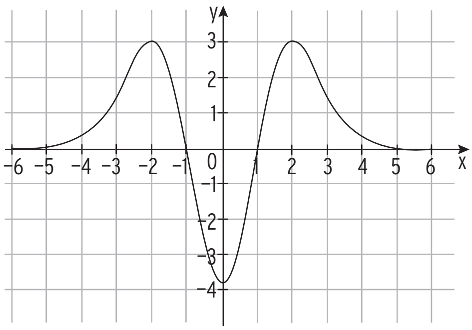
Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K_f.

1.1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie K_f ohne weitere Rechnung. 4

1.1.2 Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punktes, in dem K_f die Steigung $\frac{3}{2}$ hat. 2

1.2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds der Funktion s. 5



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Es gilt: $s''(4) < 0$.

(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.

(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x)\,dx$ ist größer als 0.

1.3 Die Funktion d ist für $x > 0$ gegeben durch $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$ und D ist eine Stammfunktion von d. 4

Zeigen Sie:

(1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.

(2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D.

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2.1 Eine Fußballmannschaft gewinnt jedes ihrer Spiele mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

2.1.1 Das Ereignis A hat die folgende Wahrscheinlichkeit: 2

$P(A) = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$

Geben Sie eine Formulierung für das Ereignis A im Sachzusammenhang an.

2.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft von vier Spielen genau zwei Spiele gewinnt und diese aufeinander folgen. 2

2.2 Eine andere Mannschaft wird von ihren Misserfolgen demotiviert. 4

Die Mannschaft gewinnt das erste Spiel einer Wahrscheinlichkeit p.

Gewinnt sie das erste Spiel nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit dann das zweite Spiel zu gewinnen $\frac{1}{2}p$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mindestens eines der beiden Spiele gewinnt, beträgt $\frac{4}{9}$.

Begründen Sie, dass durch Lösen der Gleichung

$1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$ die Wahrscheinlichkeit p ermittelt werden kann.

8

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2 In einer Urne befinden sich zunächst neun Kugeln.

Vier Kugeln haben die Farbe blau, zwei sind weiß und drei sind grün.

2.1 Zwei Kugeln werden nacheinander aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: 5

A: Die beiden gezogenen Kugeln sind weiß.

B: Unter den beiden gezogenen Kugeln befindet sich mindestens eine weiße Kugel.

C: Eine der beiden gezogenen Kugeln ist weiß und die andere blau.

2.2 Es wird nun eine unbekannte Anzahl x von grünen Kugeln der Urne hinzugefügt, sodass bei zweimaligem Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit zwei grüne Kugeln zu ziehen genau 50 % ist. 3

Ermitteln Sie eine Gleichung mit der x berechnet werden kann.

8

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Gegeben sind die Matrizen A und B. Die Matrix A hat 2 Zeilen und 3 Spalten, d.h. A hat das Format 2 x 3 . B hat das Format 3 x 2. 2

Geben Sie an, welche der folgenden beiden Berechnungen möglich ist:

(1) $3 \cdot A + 2 \cdot B$

(2) $A \cdot B$

Bestimmen Sie das Format der Ergebnismatrix.

3.2 Für jede Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bezeichnet $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ die transponierte Matix von A.

Eine Matrix heißt orthogonal, falls $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.1 Prüfen Sie, ob die Matrix 2

$\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

3.2.2 Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5$ orthogonal ist. 3

$\overline{7}$

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Berechnen Sie den Lösungsvektor des linearen Gleichungssystems, das durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist: 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

3.2 Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.1 Zeigen Sie, dass die Matrizenmultiplikation von A und B nicht kommutativ ist, das heißt $A \cdot B \neq B \cdot A$. 2

3.2.2 Durch Abänderung genau eines Koeffizienten der Matrix B lässt sich eine Matrix $\widetilde{B}$ erzeugen, die die folgenden beiden Eigenschaften hat: 2

(1) $\widetilde{B} \neq A$

(2) Die Matrizenmultiplikation von A und $\widetilde{B}$ ist kommutativ.

Geben Sie eine mögliche Matrix $\widetilde{B}$ an.

$\overline{7}$

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis **Punkte**

1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -e^{2x} + 4e^x;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1 K besitzt mit den Koordinatenachsen jeweils genau einen Schnittpunkt. Überprüfen Sie, ob dies die Punkte $S_y(0 \mid 3)$ und $N(\ln(4) \mid 0)$ sind. 2

1.2 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung f′ von f gilt: $f'(x) = 2e^x \cdot (2 - e^x)$. Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunktes von K. 4

1.3 Zeichnen Sie K für $-5 \leq x \leq 1{,}5$. 3

1.4 Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: 3
„Der Inhalt der Fläche, die K mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten einschließt, ist das Doppelte des Mittelwertes von f auf dem Intervall $[0; \ln(4)]$."

1.5 Die Gerade mit der Gleichung $y = c$ schneidet K in zwei Punkten $P(x_P \mid c)$ und $Q(x_Q \mid c)$ mit $x_P < 0$ und $x_Q > 0$.

1.5.1 Geben Sie alle möglichen Werte für c an. 2

1.5.2 Es gilt nun $c = 1$. 4
Zeigen Sie, dass dann die y-Achse die Strecke PQ halbiert.

1.6 Untersuchen Sie, ob das Schaubild der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = f(x) + f(-x)$ symmetrisch ist. 2
Geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an.

20