Ott | Rosner

Abiturprüfung in Mathematik
Analysis, Stochastik
Wahlgebiet: Vektorgeometrie

Berufliches Gymnasium

Baden-Württemberg

2022

mit Lernvideos

Schülergerechte Lösungen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * *

Umschlag Bild: © frhuynh - Fotolia.com

1. Auflage 2021

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0384-01
ISBN 978-3-8120-0384-1

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung dient zur Vorbereitung auf das **Abitur 2021** an beruflichen Gymnasien und ist auf die aktuell gültige Prüfungsordnung abgestimmt.
Für die Abiturprüfung 2022 gelten aufgrund der Pandemie besondere Vorgaben die den Ablauf und die prüfungsrelevanten Stoffgebiete betreffen.
Weitere Erläuterungen finden Sie auf den Seiten 5 und 6 und in einem ausführlichen Video.

Die Aufgaben sind nach den Prüfungsgebieten Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra gegliedert, was den Schülerinnen und Schülern ein gezieltes Üben ermöglicht.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Dem neuen Abiturmodus wird durch eine Vielzahl von Aufgaben für Teil 1, der ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss, und für die Teile 2 – 4, bei denen Hilfsmittel zugelassen sind, Rechnung getragen.
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich, um den beruflichen Gymnasien aller Richtungen gerecht zu werden.
Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Da die Aufgabensammlung allen Schülerinnen und Schülern bei der **selbstständigen** Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche und schülergerechte Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Zur Unterstützung des Lernerfolges sind **alle Hauptprüfungen ab 2016/2017** in einigen **Lernvideos** aufgearbeitet.
In der Sprache der Abiturientinnen und Abiturienten werden alle Aufgabenteile ausführlich gelöst.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Abiturprüfung 2022 in Mathematik

www.mvurl.de/f337

Zu Beginn: SchülerIn erhält alle Aufgabenteile (1 bis 4), jedoch keine Hilfsmittel

Phase 1: Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils

Teil	Thema	Auswahl	Zeitrichtwert	Punkte
1	Analysis (50%) Stochastik (25%) Wahlgebiet: Vektorgeomet-rie/Matrizen (25%)	keine	90 min	30

Nach endgültiger Abgabe von Teil 1 erhält SchülerIn die Hilfsmittel

- SchülerIn erhält **eine Aufgabe** aus der Stochastik und **eine** aus dem Wahlgebiet. Die Lehrkraft wählt diese aus jeweils zwei Aufgaben aus.

Phase 2: Bearbeitung der Teile mit Hilfsmitteln (Taschenrechner + Merkhilfe)

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Thema</th><th>Auswahl</th><th>Zeitrichtwert</th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Analysis (ca. 67%)</td><td>keine</td><td rowspan="2">120 min</td><td rowspan="2">30</td></tr>
<tr><td>Anwendungsorientierte Analysis (ca. 33%)</td><td>SchülerIn wählt eine aus drei Aufgaben</td></tr>
<tr><td>3
4</td><td>Entweder Stochastik oder
Vektorgeometrie/Matrizen</td><td>SchülerIn wählt eine aus zwei vorgelegten Aufgaben</td><td>60 min</td><td>15</td></tr>
</table>

Hinweise

- Die Prüfung dauert insgesamt maximal 270 Minuten.
  Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 75 Punkte.
- SchülerIn erhält **zwei Aufgaben entweder** aus der Stochastik oder aus dem Wahlgebiet (Vektorgeometrie oder Prozesse/Matrizen) vorgelegt. Die Auswahl (Stochastik oder Wahlgebiet) trifft die Lehrkraft

Aufgabenerstellung für die Abiturprüfung 2022 am Beruflichen Gymnasium
Prüfungsrelevante Stoffgebiete:
Schwerpunktmäßig beziehen sich die Aufgaben jeweils auf eine der entsprechenden Lehrplaneinheiten des Bildungsplans, in allen Aufgaben können aber auch Inhalte aus den anderen vier genannten LPE vorkommen:
Teil 1: Analysis
Stochastik
Lineare Algebra: Vektorgeometrie bzw. mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen
Teil 2: Analysis
Anwendungsorientierte Analysis
Teil 3: Stochastik
Teil 4: Lineare Algebra: Vektorgeometrie bzw. mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Prüfungsmodalitäten: Siehe Seite 5

Hinweise zu Teil 1:
Der Lehrkraft werden jeweils zwei Aufgaben aus der Stochastik und aus dem Wahlgebiet (entweder Vektorgeometrie oder Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen) vorgelegt. Die Lehrkraft wählt jeweils eine Aufgabe aus der Stochastik und eine Aufgabe aus dem Wahlgebiet aus.

Hinweise zu Teil 3 bzw. Teil 4:
Der Lehrkraft werden zwei Aufgaben aus der Stochastik und zwei Aufgaben aus dem Wahlgebiet (entweder Vektorgeometrie oder Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen) vorgelegt. Die Lehrkraft wählt entweder beide Aufgaben aus der Stochastik oder beide Aufgaben aus dem Wahlgebiet aus. Den Schülerinnen und Schüler werden diese zwei Aufgaben vorgelegt, davon wählen sie eine Aufgabe aus.
Für das Sachgebiet Analysis ist keine veränderte Auswahl vorgesehen.

Allgemeiner Hinweis:
Die Schülerinnen und Schüler erhalten alle Aufgabenteile zu Beginn der Prüfung. Dabei ist Teil 1 in einer Mappe und die Teile 2, und entweder Teil 3 oder Teil 4 in einer zweiten Mappe den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung zu stellen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die Aufgabenteile 2, 3 und 4 werden genau dann ausgegeben, wenn Teil 1 in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurden.

I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

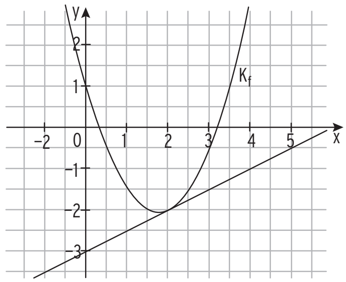
1 Übungsaufgaben

1.1 Analysis Übungsaufgaben

Lösungen Seite 21 - 23

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe 2

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 3

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1\,|\,1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von K in S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)\,dx$.
Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 7 **Lösungen Seite 23/24**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4e^{2x} - 2$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(0{,}5) = -1$.

Aufgabe 8

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Aufgabe 9

Die täglichen Heizkosten eines Hauses werden durch k(t) dargestellt.

Dabei ist t die Zeit in Tagen seit dem 1. Januar des Jahres.

Was bedeutet $\int_0^{90} k(t)dt$ bzw. $\frac{1}{90}\int_0^{90} k(t)dt$?

Aufgabe 10

Die Entwicklung der Gesamtkosten der Produktion von Fahrrädern kann durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$ beschrieben werden.

Berechnen Sie das Minimum der variablen Stückkosten und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 11

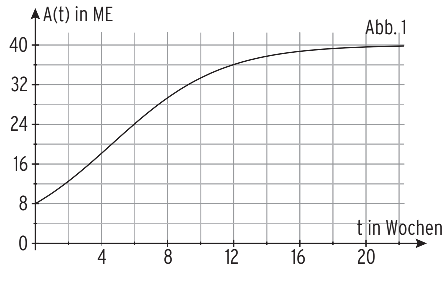
Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 12

Abb. 1 zeigt den Gesamtabsatz eines Produktes in den ersten 20 Wochen nach Einführung.

a) Erläutern Sie, wie sich der Gesamtabsatz langfristig entwickeln wird.

b) Bestimmen Sie in etwa den Zeitpunkt, an dem die momentane Änderungsrate maximal ist. Kennzeichnen Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung.



Lösungen Übungsaufgaben

Lösungen 1.1 Analysis Übungsaufgaben

Aufgabe 1 Aufgaben Seite 7

Die Abbildung zeigt eine Parabel K_f von f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Ableitung: $f'(x) = 2a \cdot x + b$

Bedingungen ablesen und LGS aufstellen: $f(0) = 1$ $\quad c = 1$

$f(2) = -2 \quad 4a + 2b + c = -2$

$f'(2) = \frac{1}{2} \quad 4a + b = \frac{1}{2}$

Einsetzen von $c = 1$ in $4a + 2b + c = -2$: $\quad 4a + 2b = -3$

$4a + b = \frac{1}{2} \quad | \cdot (-1)$ $\quad +$

Addition ergibt: $\quad b = -3{,}5$

Einsetzen in z. B. $4a + b = \frac{1}{2}$ ergibt $\quad 4a - 3{,}5 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$

Möglicher Funktionsterm $\quad f(x) = x^2 - 3{,}5x + 1$

Aufgabe 2

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$; Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$; $f''(x) = -6x + 6$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $\quad -6x + 6 = 0$ für $x = 1$

Mit $f'''(x) = -6 \neq 0$ ist $x = 1$ eine Wendestelle.

Mit $f(1) = -3$ ergibt sich der Wendepunkt $W(1 \mid -3)$.

Ansatz für die Tangente: $\quad y = mx + b$

$f'(1) = 2 = m$; Punktprobe mit W: $\quad -3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -5$

Gleichung der Tangente: $\quad y = 2x - 5$

Aufgabe 3

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen: $f(0) = 0 \quad d = 0$

$f'(0) = 0 \quad c = 0$

$H(1 \mid 1)$ der Hochpunkt: $f(1) = 1 \quad a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 0 \quad 3a + 2b + c = 0$

c und d eingesetzt: $\quad a + b = 1 \quad | \cdot 3$

$3a + 2b = 0 \quad | \cdot (-1)$ $\quad +$

Additionsverfahren: $\quad b = 3$

Einsetzen in $a + b = 1$ ergibt $\quad a = -2$

Funktionsterm: $\quad f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe 3 Aufgaben Seite 7

Alternative: Ansatz wegen Berühren in x = 0: $f(x) = ax^2(x - b) = ax^3 - abx^2$

H(1 | 1) der Hochpunkt: $f(1) = 1$ $a(1 - b) = 1$

$f'(x) = 3ax^2 - 2abx$ $f'(1) = 0$ $3a - 2ab = 0 \Rightarrow a(3 - 2b) = 0$

Wegen $a \neq 0$ folgt $(3 - 2b) = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

Eingesetzt in $a(1 - b) = 1$ ergibt $a \cdot (-\frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow a = -2$

Funktionsterm: $f(x) = -2x^2(x - \frac{3}{2})$ $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ (nicht verlangt)

Aufgabe 4

K: $f(x) = e^{x-3} - 2$; Ableitung: $f'(x) = e^{x-3}$

Ansatz für die Tangente: $y = mx + c$

Mit $f(3) = -1$ und $f'(3) = 1 = m$

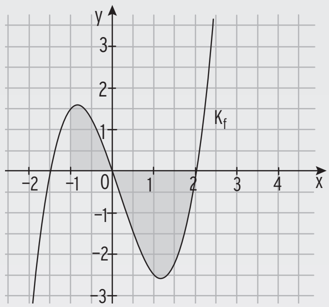
erhält man mit durch einsetzen: $-1 = 1 \cdot 3 + c \Rightarrow c = -4$

Gleichung der Tangente: $y = x - 4$

Die Asymptote hat die Gleichung $y = -2$.

Schnittpunkt von Tangente und Asymptote: $-2 = x - 4 \Rightarrow x = 2$

Koordinaten des Schnittpunktes: S(2 |− 2)



Aufgabe 5

$$\int_{-1}^{2}(x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$$

$$= 4 - \frac{4}{3} - 6 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{3}{2})$$

$$= -2 - \frac{4}{3} - \frac{3 + 2 - 18}{12} = -\frac{27}{12}$$

(Flächenbilanz) $= -2{,}25$

Das Flächenstück zwischen K_f und der x-Achse

oberhalb der x-Achse ist um 2,25 kleiner als das Flächenstück zwischen K_f und de

x-Achse unterhalb der x-Achse.

Aufgabe 6

Schnittstellen von f und g durch

Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $-x^2 + 3 = 2x$

Nullform: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Lösung mit Formel: $x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_{1|2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$

Schnittstellen = Integrationsgrenzen: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$

Integration von − 3 bis 1 über f(x) − g(x): $\int_{-3}^{1}(f(x) - g(x))dx$

Aufgabe 6 Aufgaben Seite 7

$= \int_{-3}^{1} (-x^2 + 3 - 2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x - x^2\right]_{-3}^{1}$

obere Grenze – untere Grenze $= -\frac{1}{3} + 3 - 1 - (-\frac{1}{3}(-3)^3 + 3(-3) - (-3)^2)$

$= \frac{32}{3}$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt $\frac{32}{3}$.

Aufgabe 7 Aufgaben Seite 8

$f(x) = 4e^{2x} - 2$

Stammfunktion: $F(x) = 2e^{2x} - 2x + c;\ c \in \mathbb{R}$

Bedingung für c: $F(0,5) = -1$: $F(0,5) = 2e^1 - 1 + c = -1 \Leftrightarrow c = -2e$

Gesuchte Stammfunktion: $F(x) = 2e^{2x} - 2x - 2e$

Aufgabe 8

a) Nullstelle von f

Bedingung: $f(x) = 0$ $2e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0$

$2e^{\frac{1}{2}x} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$

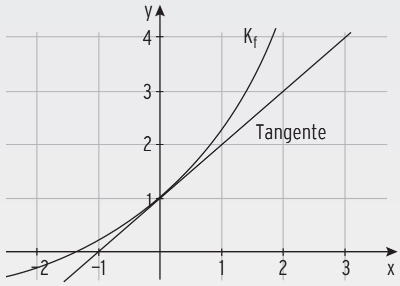
$\frac{1}{2}x = \ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x = 2\ln(\frac{1}{2})$

$x_0 = 2\ln(\frac{1}{2})$ ist Nullstelle von f

b) **Tangente** in $S(0 \mid 1)$

$f'(x) = e^{\frac{1}{2}x}$; $f'(0) = 1$;

Die Tangente ist eine Gerade mit Steigung 1, sie schneidet die x-Achse in –1 und die y-Achse in 1, die beiden Seiten (Katheten) haben die Länge 1, dieses Dreieck ist gleichschenklig.



Aufgabe 9

$\int_{0}^{90} k(t)dt$: gesamte Heizkosten über 90 Tage seit dem 1. Januar

$\frac{1}{90}\int_{0}^{90} k(t)dt$: durchschnittliche tägliche Heizkosten über 90 Tage seit dem 1. Januar.

2 Aufgabensätze Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabensatz A **Teil 1 ohne Hilfsmittel** **Lösungen Seite 51/52**

Lösungen Seite 51/52

(30 Punkte)

Analysis **Punkte**

1.1 Erläutern Sie anhand einer Skizze, ob das Integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx$ größer, kleiner oder gleich Null ist. 3

1.2 Für eine Funktion f gilt: 4

(1) $f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

(2) $f''(-2) = -3$

(3) $f''(1) = 3$

(4) $f(-2) = \frac{19}{3}$

(5) $f(1) = \frac{11}{6}$

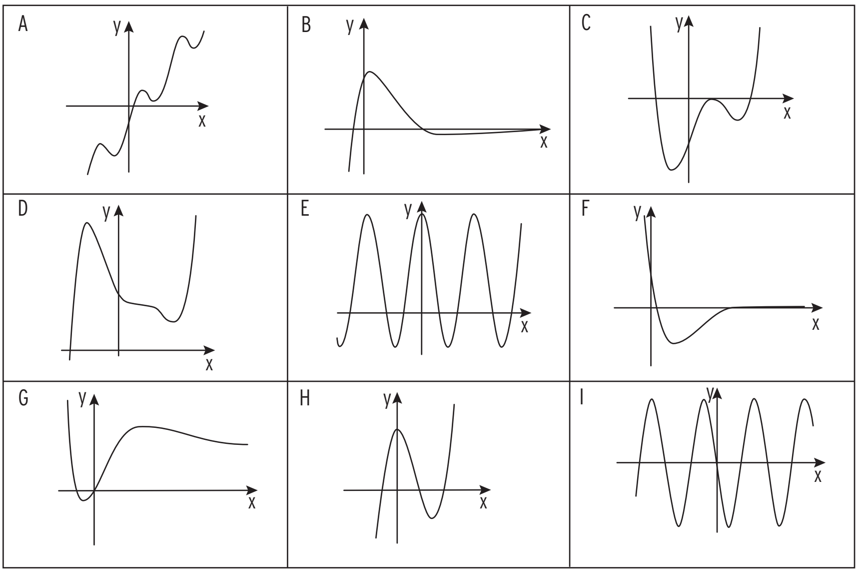
Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild von f treffen?

1.3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. 4

Geben Sie die Periode von f an.

Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $\cos(2x) = -1$.

1.4 Die Abbildungen zeigen Schaubilder von drei Funktionen sowie deren zugehörigen ersten und zweiten Ableitungen. Ordnen Sie jeweils dem Schaubild der Funktion das Schaubild ihrer ersten und zweiten Ableitung zu: 5



Aufgabensatz A Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik **Punkte**

2.1 Eine Laplace-Münze wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal Zahl und einmal Bild? 2

2.2 Ein Würfel wird 20-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal die Augenzahl 3? Geben Sie eine Term an. 2

2.3 Bei einer Blutspendenaktion werden die Blutgruppen der Spender bestimmt. 2
Ein Ereignis ist: „In einer Gruppe von fünf Freunden hat niemand die Blutgruppe Null.“
Beschreiben Sie das Gegenereignis in Worten.

2.4 Die Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung: 2

x_i	-3	-1	0	5
$P(X = x_i)$	0,2	u	w	0,2

Der Erwartungswert von X beträgt 0,2.

Berechnen Sie u und w.

Vektorgeometrie

3 Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 mit

E_1: $6x_1 - x_2 - 4x_3 = 12$ und E_2: $-3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -6$.

Die Punkte $A(2|\,0|0)$ und $B(0|\,0|-3)$ liegen in beiden Ebenen.

3.1 Begründen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 nicht identisch sind. 1

3.2 Ermitteln Sie die Koordinaten eines von A und B verschiedenen Punktes, der ebenfalls in beiden Ebenen liegt. 2

3.3 In der Gleichung von E_2 soll genau ein Koeffizient so geändert werden, dass eine Gleichung der Ebene E_1 entsteht. 2

Geben Sie diese Änderung an und begründen Sie Ihre Antwort.

30

Aufgabensatz B Teil 1 ohne Hilfsmittel Lösungen Seite 53-55

Analysis **Punkte**

1.1 Lösen Sie die Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$. 3

1.2 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt. 3

Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist.

1.3 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f. 6

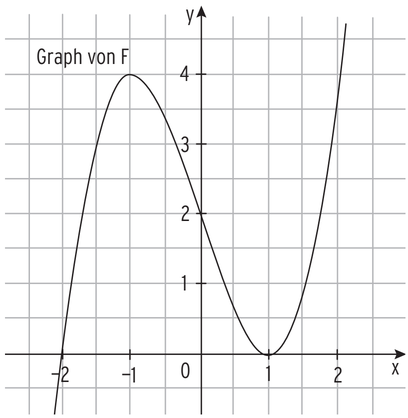
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$

(2) $\int_0^2 f(x)dx = 4$

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

(4) $f(F(-2)) > 0$



1.4 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = \sin(x)$. Es gilt $\int_0^{0,5\pi} f(x)dx = 1$.

1.4.1 Geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} f(x)dx$ an. 1

1.4.2 Begründen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion, dass 2

$\int_0^{5\pi} f(x)dx = 2$ gilt.

1.4.3 Beschreiben Sie, wie der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit 3

$h(x) = 1 + 2\sin(4x)$ aus dem Graphen von f hervorgeht.

II Teil der Abiturprüfung mit Hilfsmittel

Übungsaufgaben

Teil 2 mit Hilfsmittel

Analysis – Anwendungsorientierte Analysis

Auszug aus der Merkhilfe

5 Analysis

Änderungsrate

Durchschnittliche / Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_1]$ $\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Momentane / Lokale Änderungsrate (Ableitung) an der Stelle x_0 $\qquad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Ableitungsregeln

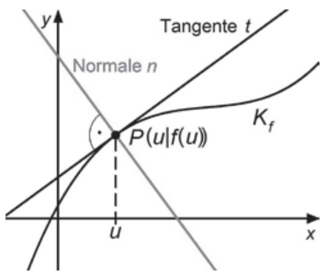
Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Faktorregel	$f(x) = a \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Spezielle Ableitungen / Stammfunktionen mit $C \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^k$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$	$F(x) = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + C$ mit $k \neq -1$
$f(x) = e^{bx}$	$f'(x) = b \cdot e^{bx}$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot e^{bx} + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin(bx)$	$f'(x) = b \cdot \cos(bx)$	$F(x) = -\frac{1}{b} \cdot \cos(bx) + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(bx)$	$f'(x) = -b \cdot \sin(bx)$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot \sin(bx) + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$

Tangente und Normale

Tangentensteigung	$m_t = f'(u)$
Tangentengleichung	$y = f'(u)(x-u) + f(u)$
Normalensteigung	$m_n = \frac{-1}{f'(u)}$
Normalengleichung	$y = \frac{-1}{f'(u)}(x-u) + f(u)$



Auszug aus der Merkhilfe

Merkhilfe Mathematik für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden-Württemberg

Untersuchung von Funktionen und ihren Schaubildern

Symmetrie	K_f ist symmetrisch zur y-Achse K_f ist symmetrisch zum Ursprung	$f(-x)=f(x)$ für alle x $f(-x)=-f(x)$ für alle x
Monotonie	f steigt monoton im Intervall J f fällt monoton im Intervall J	$f'(x)\geq 0$ im Intervall J $f'(x)\leq 0$ im Intervall J
Krümmung	K_f ist im Intervall J linksgekrümmt K_f ist im Intervall J rechtsgekrümmt	$f''(x)\geq 0$ im Intervall J $f''(x)\leq 0$ im Intervall J
Hochpunkt	K_f hat den Hochpunkt $H\left(x_0 \vert f(x_0)\right)$	$f'(x_0)=0$ und VZW +/- von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0)<0$
Tiefpunkt	K_f hat den Tiefpunkt $T\left(x_0 \vert f(x_0)\right)$	$f'(x_0)=0$ und VZW -/+ von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0)>0$
Wendepunkt	K_f hat den Wendepunkt $W\left(x_0 \vert f(x_0)\right)$	$f''(x_0)=0$ und VZW von $f''(x)$ bei x_0 oder $f'''(x_0)\neq 0$

Berechnung bestimmter Integrale

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

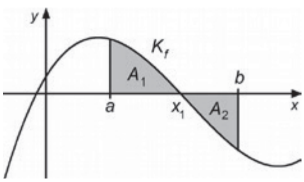
Flächenberechnung

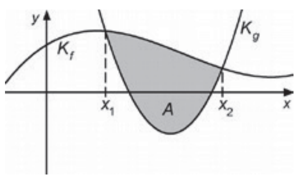
$$A_1=\int_a^{x_1} f(x)\,dx$$

$$A_2=-\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx$$

$$A=\int_{x_1}^{x_2} (f(x)-g(x))\,dx$$

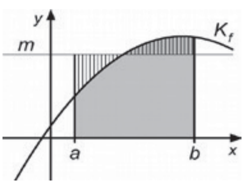
falls $f(x)\geq g(x)$ für $x\in[x_1;x_2]$





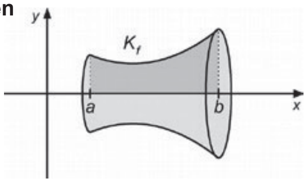
Mittelwert

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



Rotationsvolumen

$$V=\pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx$$



Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis

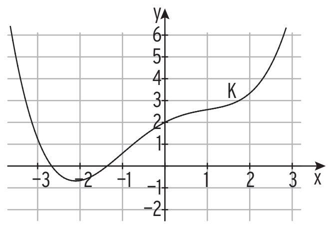
Aufgabe 1 Lösungen Seite 93/94

Punkte

1.1 Das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades geht durch den Punkt $S(0 \mid 2)$ und hat den Wendepunkt $W(1 \mid \frac{31}{12})$. Die Normale im Punkt $P(-3 \mid \frac{5}{4})$ hat die Steigung $\frac{1}{5}$. Stellen Sie ein LGS zur Bestimmung des Funktionsterms auf. 5

1.2 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f heißt K .

1.2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K. 6
Zeigen Sie: Die Tangente an K im Schnittpunkt mit der y-Achse ist parallel zu der Geraden durch die Wendepunkte.



1.2.2 Die Gerade mit der Gleichung $y = x + 2$ schließt mit K zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie den Inhalt eines der beiden Flächenstücke. 6
Markieren Sie die berechnete Fläche in einer Skizze.

1.3 C ist das Schaubild der Funktion h mit

$$h(x) = 3\sin(x - 3);\ x \in \mathbb{R}.$$

Wie entsteht das Schaubild C aus dem Schaubild der Funktion k mit $k(x) = \sin(x)$? 5
Geben Sie zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, einen Hoch- und einen Tiefpunkt von C an.

20

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 94/95**

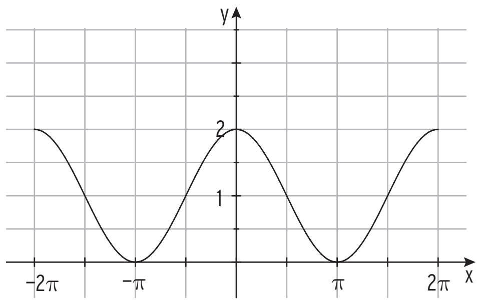
Punkte

2.1 Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 3e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

2.1.1 Das Schaubild von g, die beiden Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 2{,}5$ begrenzen eine Fläche. Zeigen Sie, für den Inhalt dieser Fläche gilt $A = 3 - 3 \cdot e^{-2{,}5}$. 4

2.1.2 Die Fläche aus 2.1.1 rotiert um die x-Achse. Dabei entsteht ein Rotationskörper. Der Rotationskörper wird so durchbohrt, dass die Bohrachse mit seiner Symmetrieachse übereinstimmt. Diese Bohrung hat den Durchmesser 1. Welches Volumen hat der Restkörper? 6

2.2 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f mit $-2\pi < x < 2\pi$.



2.2.1 Begründen Sie anhand der Abbildung, welche der folgenden Aussagen falsch oder wahr sind. 5

- f ist monoton steigend.
- Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
- Das Schaubild von f hat in $P(\frac{\pi}{2} \mid f(\frac{\pi}{2}))$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

2.2.2 Geben Sie einen Funktionsterm von f' an. 5

Die Schaubilder von f und f' schneiden sich auf der y-Achse.

Bestimmen Sie f(x).

$\overline{20}$

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Anwendungsorientierte Analysis

Aufgabe 1 Lösungen Seite 104

Punkte

1 Eine Flüssigkeit wird auf 90 °C erhitzt. Dann lässt man sie bei einer Umgebungstemperatur von 20 °C abkühlen. Bei diesem Experiment erhält man folgende Messreihe:

Zeit t in Minuten	0	1	2	3	4	5	6	7
Temperatur in °C	90	58	40	31	26	22	22	21

Die Gleichung einer quadratischen Regressionskurve lautet

$y = 2{,}298t^2 - 24{,}679t + 84{,}917$.

1.1 Stellen Sie die Messdaten in einem Koordinatensystem dar. 6

Berechnen Sie die Gleichung einer exponentiellen Regressionskurve so, dass die Umgebungstemperatur nicht unterschritten wird.

Zeichnen Sie die Regressionskurve in das Koordinatensystem ein.

Vergleichen Sie die beiden Regressionen.

1.2 In eine Tasse wird 90 °C heißer Tee eingeschenkt. Der Tee kühlt auf die Zimmertemperatur von 20 °C ab.

Die Funktion h mit $h(t) = 20 + 70 \cdot e^{-0{,}2t}$ beschreibt diesen Abkühlvorgang.

Dabei ist t die Zeit in Minuten und h(t) die Temperatur in °C.

1.2.1 Berechnen Sie die Zeit, die vergeht, bis der Tee auf Trinktemperatur (50 °C) abgekühlt ist. 2

1.2.2 Berechnen Sie die momentane Abkühlgeschwindigkeit nach 1 Minute und nach 10 Minuten. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. 2

10

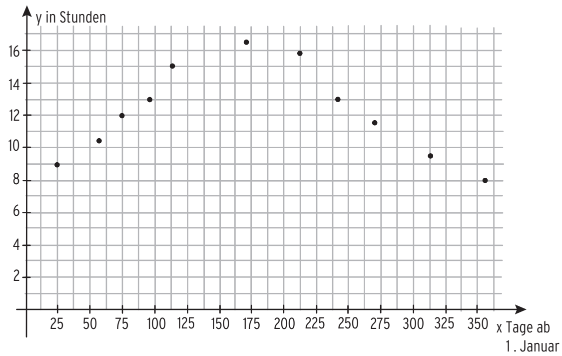
Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Anwendungsorientierte Analysis

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 105**

Punkte

2 Im Verlauf eines Jahres (365 Tage) ändert sich aufgrund der geneigten Erdachse die astronomische Sonnenscheindauer, d. h. die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang.
In unseren Breiten ist die Sonne am 21. Juni mit ca. 16,5 Stunden am längsten und am 21. Dezember mit ca. 8 Stunden am kürzesten zu sehen.



2.1 Die Messergebnisse sollen durch eine trigonometrische Funktion modelliert werden. Geben Sie einen geeigneten Funktionsterm an. 6

2.2 Tina und Tom haben jeweils einen Funktionsterm bestimmt. 4
Tina hat die Daten durch eine quadratische Regression mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}8745$, Tom durch eine Regression 4. Grades mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}9784$ angenähert.
Bewerten Sie die Güte der beiden Näherungsfunktionen.
Kann man mithilfe Toms Näherungsfunktion die astronomische Sonnenscheindauer im nächsten Jahr vorhersagen?
Begründen Sie Ihre Antwort.

10

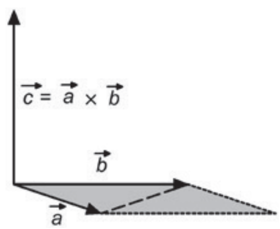
Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra – Vektorgeometrie

Auszug aus der Merkhilfe

7 Vektorgeometrie

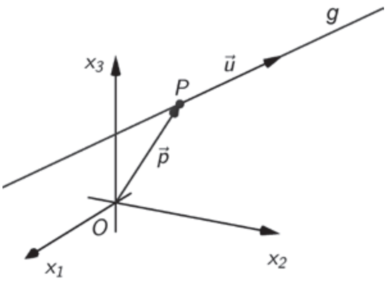
Betrag eines Vektors	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
Einheitsvektor	$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$
Länge der Strecke AB	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$
Mittelpunkt M einer Strecke AB	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$
Skalarprodukt	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
Winkel φ zwischen zwei Vektoren	$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$
Orthogonalität	$\vec{a}\perp\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$
Vektorprodukt	$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$
	$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{c}\perp\vec{a}$ und $\vec{c}\perp\vec{b}$ mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ keine Vielfachen voneinander
Flächeninhalt eines Parallelogramms	$A = \lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$
Flächeninhalt eines Dreiecks	$A = \frac{1}{2}\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$

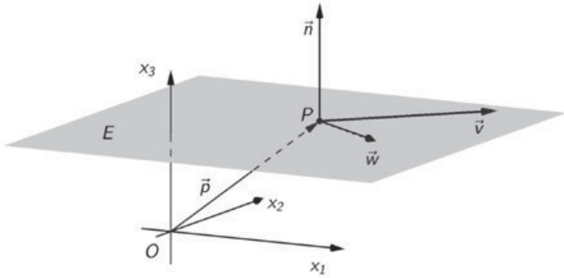


Auszug aus der Merkhilfe

Gerade und Ebene im Raum

mit Stützvektor $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, Richtungsvektor $\vec{u}$, Spannvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ und Normalenvektor $\vec{n}$





Parameterform	$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ mit $r \in \mathbb{R}$	$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$	mit $s, t \in \mathbb{R}$
Normalenform		$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$	
Koordinatenform		$E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = b$	mit $b \in \mathbb{R}$

Winkel

zwischen zwei Geraden $\quad \cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$

zwischen Gerade und Ebene $\quad \sin(\alpha) = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

zwischen zwei Ebenen $\quad \cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

Abstand

zwischen Punkt A und Ebene $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ $\quad d = \left| \dfrac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$

zwischen Punkt A und Ebene $E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = b$ $\quad d = \left| \dfrac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 - b}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$

zwischen zwei windschiefen Geraden

$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$ mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ $\quad d = \left| \dfrac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$

Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Vektorgeometrie

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 116**

Punkte

1 Gegeben sind die Gerade g sowie die Ebene E durch

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ und $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

1.1 Bestimmen Sie den Abstand, den E zum Ursprung hat. 3

1.2 Zeigen Sie, dass sich die Gerade g und die Ebene E in einem Punkt schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes und berechnen Sie den Schnittwinkel. 6

1.3 Die Ebene F verläuft durch den Punkt A(−5|0|1) und ist orthogonal zur Geraden g. Welche besondere Lage hat F im Koordinatensystem? Begründen Sie, dass sich die beiden Ebenen E und F in einer Geraden schneiden. 6

15

Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Vektorgeometrie

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 117**

Punkte

2 Gegeben sind die Punkte A(2|0|1), B(− 1|2|1), C(1|5|4) und D(3|0|5).

2.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. 3

2.2 Die Punkte A, B, C und D sind Eckpunkte einer Pyramide. Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem. 4
Beschreiben Sie die besondere Lage der Punkte A und D im Koordinatensystem.

2.3 Die Punkte A, B und C liegen in der Ebene E. 8
Geben Sie die Koordinatenform von E an.
Prüfen Sie, ob der Punkt P'(−5,5 | − 8 |14) der Spiegelpunkt von P(6,5 |10 | − 12) bezüglich der Ebene E ist.

15

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG

ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM IM SCHULJAHR 2020/2021

Hauptprüfung	AUFGABEN FÜR DAS FACH
2.5	Mathematik (AG, BTG, EG, TG, SGG, WG)

Arbeitszeit	240 Minuten
Hilfsmittel	**Teil 1:** Keine Hilfsmittel zugelassen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die nachstehenden Aufgaben bekommt die Schülerin/der Schüler genau dann, wenn sie/er den ersten Teil unwiderruflich abgegeben hat. **Teil 2, Teil 3 und Teil 4:** Merkhilfe sowie eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner sind zugelassen.
Stoffgebiet	**Teil 1** Pflichtteile Analysis und Stochastik (je 1 Aufgabe) Wahlgebiete aus der Lineare Algebra: Vektorgeometrie (1 Aufgabe) oder Matrizen (1 Aufgabe) — S. 2 - 8 **Teil 2** Analysis (1 Aufgabe) — S. 9 Anwendungsorientierte Analysis (3 Aufgaben) — S. 10 – 12 **Teil 3** Stochastik (2 Aufgaben) — S. 13 – 14 **Teil 4** Lineare Algebra: Vektorgeometrie (2 Aufgaben) — S. 15 – 16 Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen (2 Aufgaben); 1 Arbeitsblatt — S. 17 – 19
Bemerkungen	In Teil 1 wählt die Fachlehrerin/der Fachlehrer zu dem Pflichtteil Analysis jeweils eine Aufgabe aus dem Pflichtteil Stochastik und eine Aufgabe aus dem unterrichteten Wahlgebiet aus. Es sind **alle drei** vorgelegten Aufgaben zu bearbeiten. In Teil 2 ist die Aufgabe 1 zu bearbeiten. Aus den Aufgaben 2, 3 und 4 wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. Die Fachlehrerin/der Fachlehrer wählt entweder beide Aufgaben aus der Stochastik (Teil 3) oder beide Aufgaben aus dem unterrichteten Wahlgebiet (Teil 4) aus. Den Schülerinnen und Schülern werden diese beiden Aufgaben vorgelegt. Davon wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. Sie sind verpflichtet, jeden Aufgabensatz umgehend auf seine Vollständigkeit zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Blatt zu beginnen. Bei Verstößen gegen die angemessene Darstellungsform kann ein Punkteabzug erfolgen.

III Musteraufgabensätze zur Abiturprüfung

Aufgabensatz 1 **Lösungen Seite 141 - 153**

Teil 1 ohne Hilfsmittel

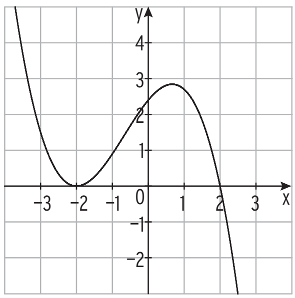
1 Analysis

1.1 Erläutern Sie anhand einer Skizze, ob das Integral $\int_0^{\pi} \cos(x)dx$ größer, kleiner oder gleich Null ist. 3

1.2 Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x) + x$ bei $x = \pi$ einen Sattelpunkt aufweist. 4

1.3 Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 3 \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$. 4
Das Schaubild von g, die beiden Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

1.4 Die nebenstehende Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion h.
Überprüfen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie.



a) Die erste Ableitung von h nimmt für $0 < x < 2$ nur positive Werte an.

b) $3 < \int_0^2 h(x)dx < 6$

c) Die zweite Ableitung von h wechselt im Bereich $-2 < x < 1$ das Vorzeichen von plus nach minus.

1.5 Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (5x + 1) \cdot e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$. 2

Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik

Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden:

Rot: 20 %   Grün: 30 %   Blau: 50 %

Das Glücksrad wird n-mal gedreht.

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

2.1 Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist. 2

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P(X = k)	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	...

2.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird. 2

2.3 Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann: 20, 25 oder 30. 2

Begründen Sie ihre Entscheidung.

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Gegeben sind die Punkte $A(2 \mid 4 \mid 1)$, $B(0 \mid 2 \mid -1)$, $C(4 \mid -2 \mid 1)$ und $D(-1 \mid 9 \mid 0)$. 3

Überprüfen Sie, ob diese vier Punkte in einer Ebene liegen.

3.2 Gegeben sind die Gleichungen von 2 parallelen Geraden. 3

Beschreiben Sie, auch mithilfe einer Skizze, wie man die Gleichung einer Ebene erhält, in welcher beide Geraden liegen.

30

Aufgabensatz 1

Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1

Analysis

Punkte

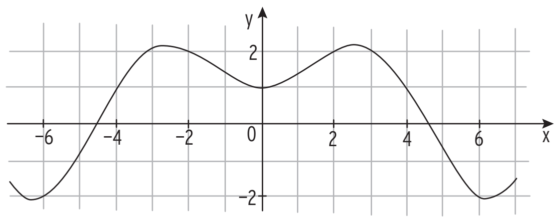
1 Die Funktion g hat die Gleichung $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von g ist K.

1.1 Untersuchen Sie K auf Symmetrie. 7
Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K.
Zeichnen Sie K.

1.2 Die beiden Wendetangenten begrenzen mit K eine Fläche. 5
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

1.3 Betrachten Sie nun die Funktion w mit $w(x) = -4x^2 + 4$ mit $x \in \mathbb{R}$. 2
Die Schaubilder von g und w schneiden sich in $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.
Das Flächenstück, das von den beiden Schaubildern eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse. Geben Sie einen Rechenansatz zur Berechnung des Volumens des entstehenden Rotationskörpers an.

1.4 Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f mit dem Definitionsbereich $[-7; 7]$. 6



Begründen Sie für jede der folgenden Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist.

(1) Die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle x = 2 hat die Steigung − 1.

(2) Das Schaubild jeder Stammfunktion von f hat an der Stelle x = 0 eine waagerechte Tangente.

(3) Jede Stammfunktion von f hat fünf Wendestellen.

(4) $\int_0^4 f'(x)dx = 0$

Lösungen Musteraufgabensätze zur Abiturprüfung

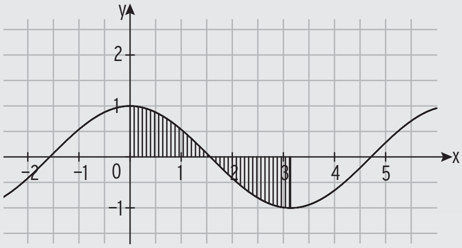
Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel 1 Analysis

Aufgabe Seite 123

1.1 Durch das Integral werden die Inhalte der beiden Teilflächen miteinander verrechnet. Da beide Teilflächen den gleichen Flächeninhalt aufweisen, hat das Integral den Wert 0.

Skizze:



$\cos(0) = 1$; $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$; $\cos(\pi) = -1$

1.2 Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente. Somit muss gelten: $f''(\pi) = 0$ und $f'''(\pi) \neq 0$ und $f'(\pi) = 0$

$f(x) = \sin(x) + x$; $f'(x) = \cos(x) + 1$; $f''(x) = -\sin(x)$; $f'''(x) = -\cos(x)$

Die Bedingungen werden überprüft:

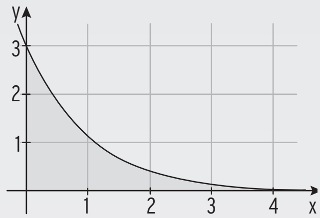
$f''(\pi) = 0$ $\quad -\sin(\pi) = 0$

$f'''(\pi) \neq 0$ $\quad -\cos(\pi) = 1 \neq 0$

$f'(\pi) = 0$ $\quad \cos(\pi) + 1 = 0$

Da alle Bedingungen erfüllt sind, liegt hier ein Sattelpunkt vor.

1.3 $g(x) = 3 \cdot e^{-x} > 0$



Inhalt dieser Fläche: $A = \int_0^4 3 \cdot e^{-x}dx = [-3e^{-x}]_0^4$

$A = -3 \cdot e^{-4} + 3 \cdot e^0$

$A = -3 \cdot e^{-4} + 3$

1.4 a) Die Aussage ist falsch. Beispielweise hat das Schaubild von h bei $x = 1$ eine negative Steigung ($h'(1) < 0$), somit weist die erste Ableitung von h hier einen negativen y-Wert auf.

b) Die Aussage ist wahr. Die Fläche, die von den Koordinatenachsen und dem Schaubild von h eingeschlossen wird, ist größer als drei Flächeneinheiten aber kleiner als sechs Flächeneinheiten, wie man durch „Kästchenzählen“ ermitteln kann.

c) Die Aussage ist wahr. Das Schaubild weist bei ca. $x = -0{,}7$ einen Wendepunkt auf. Hier findet ein Wechsel von Linkskrümmung ($h''(x) > 0$) zu Rechtskrümmung ($h''(x) < 0$) statt.

1.5 Ableitung mit der Produktregel und der Kettenregel: $f(x) = (5x + 1) \cdot e^{2x}$

$f'(x) = 5 \cdot e^{2x} + (5x + 1) \cdot 2 \cdot e^{2x}$

$f'(x) = e^{2x}(5 + (5x + 1) \cdot 2) = e^{2x} \cdot (10x + 7)$

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel Stochastik Aufgabe Seite 124

2.1 Damit eine Zufallsvariable als binomialverteilt angenommen werden kann, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- In jedem Durchgang gibt es nur zwei mögliche Ergebnisse („rot“; „nicht rot“)
- In jedem Durchgang ist die Wahrscheinlichkeit für „rot“ bzw. „nicht rot“ gleich
- Die Durchgänge (Drehungen) sind unabhängig voneinander.

2.2 X ist binomialverteilt mit n = und p = 0,2

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$

$= 1 - (0{,}01 + 0{,}06 + 0{,}14) = 0{,}79$ Werte aus der Tabelle entnehmen

2.3 Die Formel für den Erwartungswert bei einer binomialverteilten Zufallsvariable lautet: $\mu = n \cdot p$.

Die gegebenen Werte für n werden eingesetzt: $n = 20;\ \mu = 20 \cdot 0{,}2 = 4$

$n = 25;\ \mu = 25 \cdot 0{,}2 = 5$ $n = 30;\ \mu = 30 \cdot 0{,}2 = 6$

Beim Erwartungswert muss die größte Wahrscheinlichkeit vorliegen.

Dies ist in der Tabelle für k=4 der Fall.

Somit muss der Tabelle n = 20 zugrunde liegen.

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 $A(2 \mid 4 \mid 1)$, $B(0 \mid 2 \mid -1)$, $C(4 \mid -2 \mid 1)$, $D(-1 \mid 9 \mid 0)$

Zuerst wird die Gleichung einer Ebene ermittelt, in welcher die Punkte A, B und C liegen. Dann wird überprüft, ob auch der Punkt D in dieser Ebene liegt.

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$$

Punktprobe mit $D(-1 \mid 9 \mid 0)$ ergibt ein LGS:

$-1 = 2 - 2r + 2s$ (1) $9 = 4 - 2r - 6s$ (2) $0 = 1 - 2r$ (3)

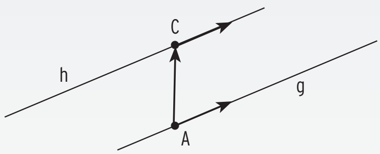
Aus Gleichung (3) erhält man $r = 0{,}5$.

Durch Einsetzen in Gleichung (1) erhält man $-1 = 2 + 0{,}5(-2) + 2s \Rightarrow s = -1$.

Die Probe in Gleichung (2) ergibt eine wahre Aussage.

Somit liegen die vier Punkte in einer Ebene.

3.2 Gleichungen von 2 parallelen Geraden



g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\vec{u}$ h: $\vec{x} = \overrightarrow{OC} + r\,\vec{u}$

E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\vec{u} + s\,\overrightarrow{AC}$

Beispielsweise erhält man die Gleichung der Ebene, indem man, ausgehend von Geraden g, den Verbindungsvektor der beiden Stützpunkte als weiteren Richtungsvektor verwendet.

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1** Aufgabe Seite 125

Analysis

1 K: $g(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{4}$; $x \in \mathbb{R}$

1.1 Symmetrie

g ist eine ganzrationale Funktion und besitzt nur Potenzen mit geraden Exponenten. Deshalb ist ihr Schaubild symmetrisch zur y-Achse.

Alternativ:

Nachweis, dass $g(-x) = g(x)$ gilt: $\frac{1}{4} \cdot (-x)^4 - \frac{3}{2} \cdot (-x)^2 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{4}$

Extrempunkte

Ableitungen: $g'(x) = x^3 - 3x$; $g''(x) = 3x^2 - 3$

Bedingung: $g'(x) = 0$ $x^3 - 3x = 0$

Ausklammern: $x(x^2 - 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt. $x = 0 \vee x^2 - 3 = 0$

Lösungen: $x_1 = 0$; $x_{2|3} = \pm\sqrt{3}$

Nachweis: $g''(0) = -3 < 0$; $x_1 = 0$ ist Maximalstelle; $H(0 \mid \frac{5}{4})$

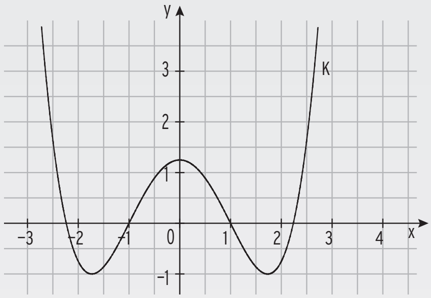
$g''(\pm\sqrt{3}) = 6 > 0$; $x_{2|3} = \pm\sqrt{3}$

sind Minimalstellen; $T_{1|2}(\pm\sqrt{3} \mid -1)$

$g(\sqrt{3}) = -1$ (WTR)

Aufgrund der Symmetrie

zur y-Achse: $g(\sqrt{3}) = g(-\sqrt{3})$



1.2 Wendepunkte

Bedingung: $g''(x) = 0$ $3x^2 - 3 = 0$

Wendestellen: $x_{1|2} = \pm 1$

Wendepunkte: $W_{1|2}(\pm 1 \mid 0)$

Steigung im Wendepunkt: $g'(1) = -2$

Wendetangente: $y = -2x + b$

Punktprobe mit $W(1 \mid 0)$: $0 = -2 + b \Rightarrow b = 2$

Tangentengleichung: $y = -2x + 2$

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis **Punkte**

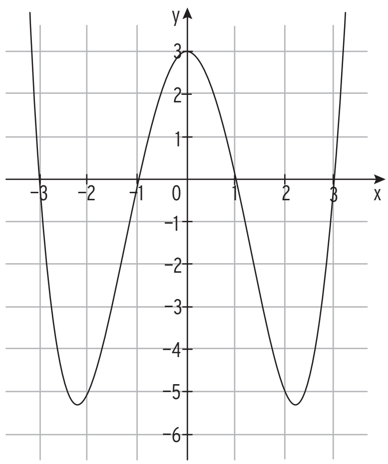
1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + 1;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1.1 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte und Wendepunkte. 8
Zeichnen Sie K.

1.1.2 Das Schaubild K, die Tangente an K an der Stelle $x = -1$ und die 5
y-Achse schließen im zweiten Quadranten eine Fläche ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

1.1.3 Für einen positiven Wert von m hat das Schaubild der Funktion g 3
mit $g(x) = 0{,}5 \cdot x^4 + x^3 + x^2 + m \cdot x + 2;\ x \in \mathbb{R}$,
genau einen gemeinsamen Punkt mit K.
Bestimmen Sie diesen Wert von m.

1.2 C ist das Schaubild eine Funktion h. 4
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion h′.



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen für den abgebildeten Bereich wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Das Schaubild C hat den Tiefpunkt $T(1 \mid h(1))$.

(2) Es gibt Punkte, an denen C eine Normale mit Steigung $\frac{1}{6}$ hat.

20

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

Im Verlauf von etwa 30 Tagen ändert der Mond ständig sein Erscheinungsbild (siehe Abbildung).

Der beleuchtete Anteil der erdzugewandten Seite des Mondes wird modellhaft durch die Funktion A mit

$A(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{15} \cdot t); \; 0 \leq t \leq 30,$

beschrieben. Dabei steht t für die Tage seit Beobachtungsbeginn, beispielsweise ist t = 1 das Ende des ersten Tages.

2.1 Skizzieren Sie das Schaubild von A. 4

Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Frage, die durch Lösen der Gleichung A(t) = 0,95 beantwortet werden kann.

2.2 Ermitteln Sie den durchschnittlichen Anteil, der von Beobachtungs- 4
beginn bis zum Ende des fünfzehnten Tages beleuchtet wird.

2.3 Das Modell A soll nun zu einem Modell B abgeändert werden, sodass 2
der Zeitpunkt t = 0 der Beleuchtung bei Vollmond entspricht.

Bestimmen Sie hierzu einen Wert für c, sodass die Funktion B mit

$B(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{15} \cdot t + c); \; 0 \leq t \leq 30,$

diesen Sachverhalt modelliert.

$\overline{10}$

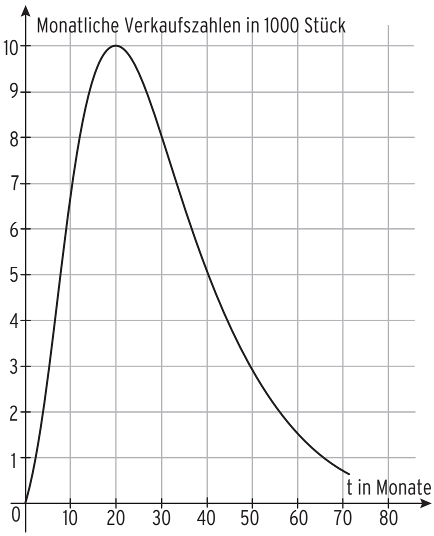
Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

Die folgende Abbildung zeigt die Modellierung eines sogenannte Produktlebenszyklus. Darin sind die monatlichen Verkaufszahlen V eines Produkts (z. B. PKW) in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Zum Zeitpunkt t = 0 beginnt die Einführung des Produkts auf dem Markt. Nach sechs Jahren wird das Produkt vom Markt genommen.

Der Produktlebenszyklus wird lückenlos in vier Phasen unterteilt:



1. Einführungs-und Wachstumsphase
   - Zunahme der Verkaufszahlen
   - Zunahme der momentanen Änderungsrate der Verkaufszahlen
2. Reifephase
   - Zunahme der Verkaufszahlen
   - Verkaufszahlen überschreiten 95% des Maximums nicht
   - keine Zunahme der momentanen Änderungsrate der Verkaufszahlen
3. Sättigungsphase
   - Verkaufszahlen liegen über 95% des Maximums
4. Degenerationsphase
   - beginnt nach der Sättigungsphase

Die Aufgaben 3.1 und 3.2 sollen näherungsweise mit Hilfe der Abbildung gelöst werden.

3.1 Geben Sie für jede der vier Phasen das entsprechende Zeitintervall an. 4

3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der verkauften Produkte in den gesamten sechs Jahren. 2

3.3 Im Folgenden ist V die Funktion der monatlichen Verkaufszahlen in Abhängigkeit von der Zeit t. Formulieren Sie jeweils einen mathematischen Ansatz, um folgende Fragen mithilfe von V beantworten zu können: 4

(1) In welchem Zeitraum liegen die monatlichen Verkaufszahlen über 3000 Stück und weisen keinen Rückgang auf?

(2) In welchen dreimonatigen Zeiträumen liegt die Gesamtverkaufszahl bei 40 000?

10

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

In Schulversuchen wird die Lösung eines chemischen Stoffes mit Salzsäure versetzt. Dadurch zerfällt der Stoff und dessen Konzentration c sinkt im Laufe der Zeit t.

v ist die momentane Änderungsrate der Konzentration c.

Im Folgenden sind c in Mol pro Liter ($\frac{\text{mol}}{\text{l}}$) und die Zeit t in Sekunden (s) angegeben.

4.1 In einem ersten Versuch wird die Konzentration c in Abhängigkeit von t modelliert durch:

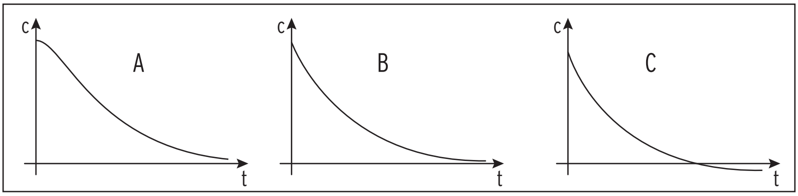
$c(t) = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017 \cdot t}; \quad t \geq 0.$

4.1.1 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem nur noch 10 % der Anfangskonzentration vorhanden sind. 4

Geben Sie den Wert von v drei Minuten nach Versuchsbeginn an.

In welcher Einheit wird v gemessen?

4.1.2 Eine der unten stehenden drei Abbildungen zeigt das Schaubild der Funktion c. Entscheiden Sie welche. Erläutern Sie, warum die beiden anderen Schaubilder nicht in Frage kommen. 2



4.2 Unter anderen Bedingungen berechnet sich die momentane Änderungsrate v zum Zeitpunkt t durch $v(t) = -0{,}007 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t}; \quad t \geq 0.$ 4

Die Anfangskonzentration des Stoffes ist dann $0{,}125 \ \frac{\text{mol}}{\text{l}}$.

Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Anfangskonzentration langfristig übrig bleibt.

10

Lösungen Hauptprüfung 2016/2017

www.mvurl.de/i4f2

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.1 Nullstellen von f: $f(x) = 0$ $3 \cdot x^3 - 27 \cdot x = 0$
Ausklammern: $3x(x^2 - 9) = 0$
Satz vom Nullprodukt: $3x = 0$ oder $x^2 - 9 = 0$
Nullstellen: $x = 0 \vee x = \pm 3$

1.2 $g'(3) = 2$ Die Steigung der Tangente an das Schaubild von g an der Stelle $x = 3$ ist 2.
$g''(3) = 0;\ g'''(3) \neq 0$ Das Schaubild der Funktion g hat einen Wendepunkt an der Stelle $x = 3$.

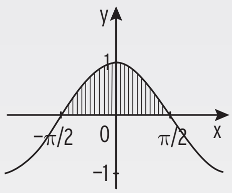
1.3 $h(x) = e^{2x} - 4 \cdot x;\ h'(x) = 2e^{2x} - 4$

1.3.1 Punkt mit waagrechter Tangente: $h'(x) = 0$ $2e^{2x} - 4 = 0$
$e^{2x} = 2$
Logarithmieren: $2x = \ln(2)$, also $x = \frac{1}{2}\ln(2)$
y-Wert: $h(\frac{1}{2}\ln(2)) = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2}\ln(2) = 2 - 2\ln(2)$
Gesuchter Punkt $(\frac{1}{2}\ln(2) \mid 2 - 2\ln(2))$

1.3.2 Stammfunktion von h: $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$
durch $P(0 \mid 5)$: $H(0) = \frac{1}{2}e^0 + c = 5$ für $c = 4{,}5$
Gesuchte Stammfunktion: $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot x^2 + 4{,}5;\ x \in \mathbb{R}$

1.4.1 Der Wert des Integrals entspricht dem Inhalt der Fläche, die vom Schaubild von p, der y-Achse und der x-Achse im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ umrandet wird.

Skizze:



$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 2$ für $a = -\frac{\pi}{2}$ (wegen der Achsensymmetrie zur y-Achse)

oder für $a = -\frac{5}{2} \cdot \pi$ oder für $a = -\frac{9}{2} \cdot \pi$

($\int_0^{2\pi} \cos(x)dx = 0$; Integral über eine Periode ergibt den Wert 0)

1.4.2 Das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x + 2);\ x \in \mathbb{R}$

geht aus dem Schaubild von p hervor durch
- Verschiebung des Schaubildes von p um 2 nach links
- Spiegelung an der x-Achse

Teil 1 ohne Hilfsmittel Stochastik - Lösungen

www.mvurl.de/6fux

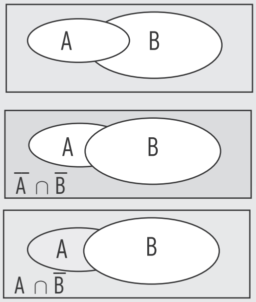
2.1 Ein Experiment gelingt in 50 % aller Fälle: $p = 0{,}5$

viermalige Durchführung: $n = 4$; X: Anzahl der Treffer

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}5^4 = 1 - \frac{1}{16} < 1 - \frac{1}{20} = 0{,}95$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment bei 4-maliger Durchführung mindestens einmal gelingt, nicht mehr als 95 %.

2.2 $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}42$; $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}28$; $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}18$



$P(A \cap B) = 1 - (P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)) = 0{,}12$

$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0{,}40 = 40\ \%$

$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0{,}30 = 30\ \%$

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 = P(A \cap B)$

Alternative mit einer Vierfeldertafel:

	B	$\overline{B}$	
A	**0,12**	*0,28*	0,40
$\overline{A}$	*0,18*	*0,42*	0,60
	0,30	0,70	1

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 = P(A \cap B)$

Teil 1 ohne Hilfsmittel Lineare Algebra: Vektorgeometrie - Lösungen

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$ $\quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}.$

mvurl.de/x335

3.1 Gegenseitige Lage

Gleichsetzen führt auf:

$1 + 4r = 2 - s$	oder	$4r + s = 1$	(1)
$7 + 2r = 1 - s$		$2r + s = -6$	(2)
$-2 \quad = 5 + 4s$		$4s = -7$	(3)

$(1) + (2) \mid \cdot (-2)$ ergibt $-s = 13$ und damit $s = -13$

Aus Gleichung (3) folgt $s = -\frac{7}{4}$ Widerspruch !

Das LGS ist nicht lösbar (Lösungsmenge ist leer). Da außerdem die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind, sind die Geraden windschief zueinander.

3.2 g_3 schneidet g_1 und g_2; g_3 verläuft z.B. durch die beiden Stützpunkte

$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

3.3 g_4 schneidet g_1 rechtwinklig. Die Gerade g_1 liegt in einer Ebene, die parallel zur x_1x_2-Ebene ist ($x_3 = 0$ im Richtungsvektor).

Somit ist der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal zum Richtungsvektor von g_1 .

Teil 1 ohne Hilfsmittel
Lineare Algebra: Vektorgeometrie - Lösungen

3.3 Damit ist z. B. g_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

Der Abstand von g_1 zur x_1x_2-Ebene beträgt 2 LE ($x_3 = -2$ im Stützvektor).

Hauptprüfung 2016/2017 Lösungen

Teil 2 mit Hilfsmittel - Aufgabe 1

www.mvurl.de/2rl4

Analysis

1.1 K: $f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + 1$; $x \in \mathbb{R}$

Ableitungen: $f'(x) = 2x^3 + 3x^2$; $f''(x) = 6x^2 + 6x$; $f'''(x) = 12x + 6$

1.1.1 Extrempunkte

Bedingung: $f'(x) = 0$ — $2x^3 + 3x^2 = x^2(2x + 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt ergibt: $x_{1|2} = 0$; $x_3 = -1{,}5$

Mit $f''(-1{,}5) = 4{,}5 > 0$

und $f(-1{,}5) = 0{,}15625$ — $T(-1{,}5 \mid 0{,}15625)$

In $x = 0$ liegt kein Extrempunkt vor, da $f'(x)$ dort das Vorzeichen nicht wechselt ($x_{1|2} = 0$ ist doppelte Nullstelle von f', siehe auch Wendestelle)

Wendepunkte

Bedingung: $f''(x) = 0$ — $6x^2 + 6x = 6x(x + 1) = 0$

Satz vom Nullprodukt ergibt: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$

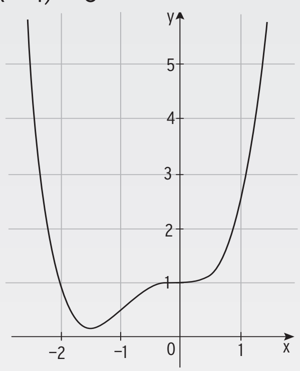
Mit $f'''(0) = 6 \neq 0$

und $f(0) = 1$: $W_1(0 \mid 1)$

Mit $f'''(-1) = -6 \neq 0$

und $f(-1) = 0{,}5$: $W_2(-1 \mid 0{,}5)$

Schaubild K:



1.1.2 Tangente an K an der Stelle $x = -1$

$f'(-1) = 1$; $W_2(-1 \mid 0{,}5)$

t: $y = 1 \cdot x + b$

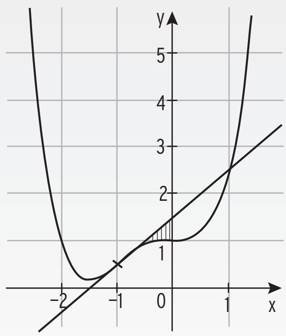
Punktprobe mit W_2 ergibt: $y = x + 1{,}5$

Fläche zwischen K, t in den Grenzen -1 und 0

$$\int_{-1}^{0} (x + 1{,}5 - f(x))dx = \int_{-1}^{0} (-0{,}5x^4 - x^3 + x + 0{,}5)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0} = 0{,}15$$

Inhalt dieser Fläche A = 0,15 (FE)



Abiturprüfungen am beruflichen Gymnasium

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel Aufgabe 1 **Lösungen Seite 260-272**

Analysis **Punkte**

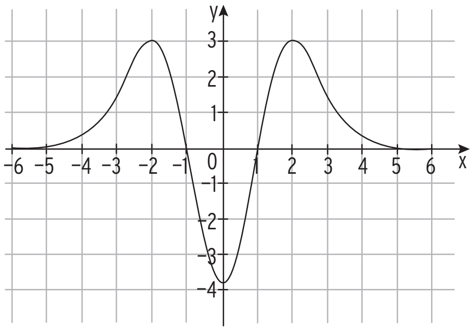
Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K_f.

1.1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie K_f ohne weitere Rechnung. 4

1.1.2 Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punktes, in dem K_f die Steigung $\frac{3}{2}$ hat. 2

1.2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds der Funktion s. 5



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Es gilt: $s''(4) < 0$.

(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.

(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x)\,dx$ ist größer als 0.

1.3 Die Funktion d ist für $x > 0$ gegeben durch $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$ und D ist eine Stammfunktion von d. 4

Zeigen Sie:

(1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.

(2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D.

$\overline{15}$

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2.1 Eine Fußballmannschaft gewinnt jedes ihrer Spiele mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

2.1.1 Das Ereignis A hat die folgende Wahrscheinlichkeit: 2

$P(A) = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$

Geben Sie eine Formulierung für das Ereignis A im Sachzusammenhang an.

2.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft von vier Spielen genau zwei Spiele gewinnt und diese aufeinander folgen. 2

2.2 Eine andere Mannschaft wird von ihren Misserfolgen demotiviert. 4

Die Mannschaft gewinnt das erste Spiel einer Wahrscheinlichkeit p.

Gewinnt sie das erste Spiel nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit dann das zweite Spiel zu gewinnen $\frac{1}{2}$p.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mindestens eines der beiden Spiele gewinnt, beträgt $\frac{4}{9}$.

Begründen Sie, dass durch Lösen der Gleichung

$1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$ die Wahrscheinlichkeit p ermittelt werden kann.

8

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2 In einer Urne befinden sich zunächst neun Kugeln.

Vier Kugeln haben die Farbe blau, zwei sind weiß und drei sind grün.

2.1 Zwei Kugeln werden nacheinander aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: 5

A: Die beiden gezogenen Kugeln sind weiß.

B: Unter den beiden gezogenen Kugeln befindet sich mindestens eine weiße Kugel.

C: Eine der beiden gezogenen Kugeln ist weiß und die andere blau.

2.2 Es wird nun eine unbekannte Anzahl x von grünen Kugeln der Urne hinzugefügt, sodass bei zweimaligem Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit zwei grüne Kugeln zu ziehen genau 50 % ist. 3

Ermitteln Sie eine Gleichung mit der x berechnet werden kann.

8

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3 Die Punkte A(5 | 1 | 0), B, C und D liegen in einer gemeinsamen Ebene und es gilt $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt von $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ liegt in der Mitte von A und C.

3.1 Begründen Sie, dass $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ einen rechten Winkel einschließen und den gleichen Betrag haben. 3

3.2 Fertigen Sie eine geeignete zweidimensionale Skizze an, die zeigt, dass das Viereck ABCD kein Quadrat sein muss. 2

3.3 Ermitteln Sie für den Fall, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist, die Koordinaten der Eckpunkte B und D. 2

$\overline{7}$

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Berechnen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems: 3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \\ -x_1 + 2x_2 &= -3 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

3.2 Gegeben sind die Geraden g und h mit

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

3.2.1 Zeigen Sie, dass g und h parallel aber nicht identisch sind. 2

3.2.2 Bestimmen Sie einen Punkt P, der von g und h den gleichen Abstand hat. 2

$\overline{7}$

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis **Punkte**

1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -e^{2x} + 4e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1 K besitzt mit den Koordinatenachsen jeweils genau einen Schnittpunkt. 2
Überprüfen Sie, ob dies die Punkte $S_y(0 \mid 3)$ und $N(\ln(4) \mid 0)$ sind.

1.2 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung f′ von f gilt: $f'(x) = 2e^x \cdot (2 - e^x)$. 4
Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunktes von K.

1.3 Zeichnen Sie K für $-5 \leq x \leq 1{,}5$. 3

1.4 Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: 3
„Der Inhalt der Fläche, die K mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten einschließt, ist das Doppelte des Mittelwertes von f auf dem Intervall $[0; \ln(4)]$."

1.5 Die Gerade mit der Gleichung $y = c$ schneidet K in zwei Punkten $P(x_P \mid c)$ und $Q(x_Q \mid c)$ mit $x_P < 0$ und $x_Q > 0$.

1.5.1 Geben Sie alle möglichen Werte für c an. 2

1.5.2 Es gilt nun $c = 1$. 4
Zeigen Sie, dass dann die y-Achse die Strecke PQ halbiert.

1.6 Untersuchen Sie, ob das Schaubild der auf IR definierten Funktion g mit 2
$g(x) = f(x) + f(-x)$ symmetrisch ist.
Geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an.

20