„Sie müssen das Buch so schreiben, dass alles drin ist, aber man es trotzdem versteht!“
(Aufforderung einer Schülerin)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.
- eine gute Note in der Abiturprüfung zu erreichen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.
- den Notendurchschnitt Ihrer Klasse in der Abiturprüfung zu optimieren.

Konzept

Der Kern des Buches besteht aus eingängigen **Stoffzusammenfassungen zu allen Lehrplanthemen** des **erhöhten Anforderungsniveaus** am beruflichen Gymnasium in Baden-Württemberg.
Die Zusammenfassungen sind so konzipiert, dass alle mathematischen Inhalte direkt aufgenommen und kognitiv verarbeitet werden können.

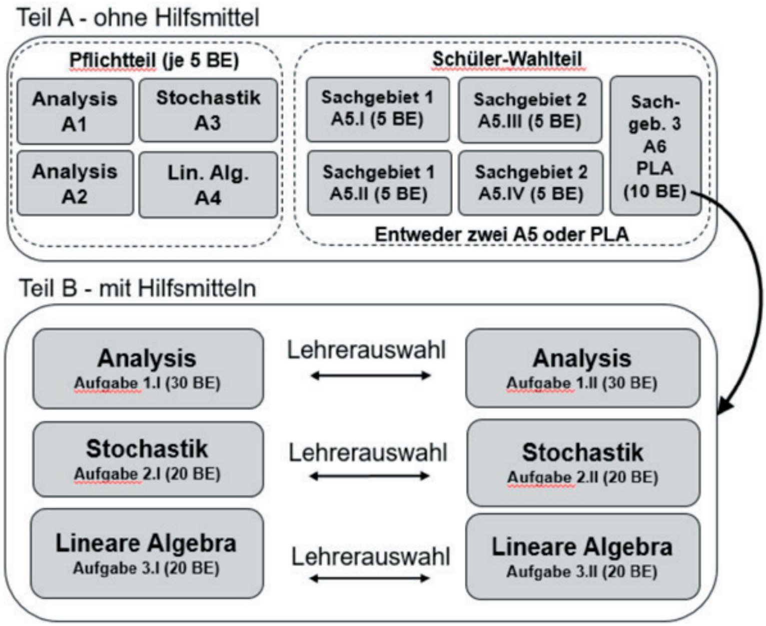
Die über **100 Videos** im Buch bieten einen weiteren Lernzugang, welcher in Kombination mit dem Buch bei vielen Schülerinnen und Schülern nachweisbar zu besseren Lernergebnissen führt.

Das Ende des Buches besteht aus kurzen, elementaren **Basisübungen** zu allen Themen. Diese werden **ausführlich gelöst**.

Ablauf der Abiturprüfung

Arbeitszeit: 300 Minuten (maximal 110 Minuten für Teil A)

Bewertungseinheiten: 100 gesamt



* Sachgebiete sind Analysis, Stochastik und Lineare Algebra — Quelle: IBBW Baden-Württemberg

Erläuterungen

- **Pflichtteil (Teil A, ohne Hilfsmittel)**: Die vorgelegten 4 Aufgaben (zu allen Themen des Lehrplans) müssen bearbeitet werden.
- **Schüler-Wahlteil (Teil A, ohne Hilfsmittel)**
  Beispiel: Es liegen 2 Aufgaben zur Analysis (Sachgebiet 1) und 2 Aufgaben zur Stochastik (Sachgebiet 2) vor. Alle diese Aufgabe sind mit „Aufgabe 5“ bezeichnet. Zusätzlich liegt die Aufgabe 6 zum Problemlösen (PLA) zur Linearen Algebra vor.
  Die Schüler*in wählt dann **entweder zwei beliebige Aufgaben 5** aus **oder wählt (nur) die Aufgabe 6 zum Problemlösen** aus. In diesem Fall gibt die Schüler*in **vor** der Bearbeitung der Problemlöseaufgabe den Teil A ab und erhält dann zur Bearbeitung der Problemlöseaufgabe die **Hilfsmittel (Taschenrechner und Merkhilfe)**.
- **Teil B, mit Hilfsmittel:** Vor der Prüfung wählt die Lehrer*in aus je zwei Aufgaben zur Analysis, Stochastik und Linearer Algebra jeweils eine Aufgabe aus.

Faustformel zur Zeitplanung: Aus 300 min für 100 BE ergeben sich **3 min pro BE**.

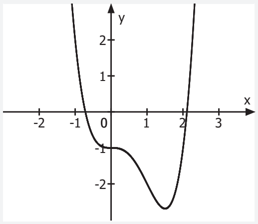
Hinweis: Zur weiteren Erläuterung sei auf das nachfolgende **Video** verwiesen.

www.mvurl.de/lv7y

Ganzrationale Funktion

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$

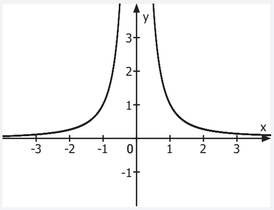
(S. 12)



Potenzfunktionen

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

(S. 16)

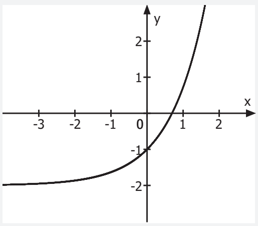


Funktionstypen

Exponentialfunktion

$f(x) = e^x - 2$

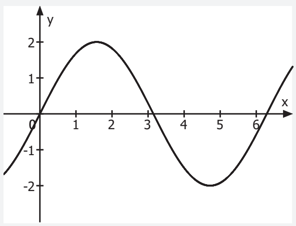
(S. 18)



Trignonometrische Funktion

$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$

(S. 20)

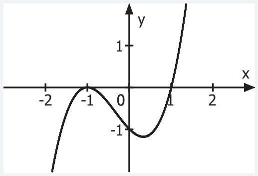


Analysis
Funktionen

Nullstellenansatz

$f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)$

(S. 14)

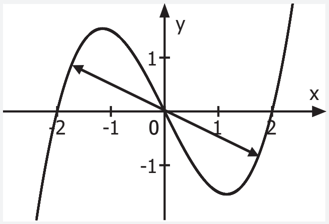


Symmetrie

…zur y-Achse

…zum Ursprung

(S. 24)



Spiegeln, Strecken und Verschieben

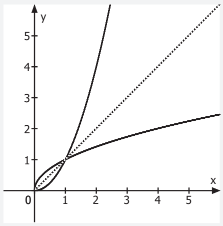
(S. 22)

Umkehrfunktion

$f(x) = x^2$

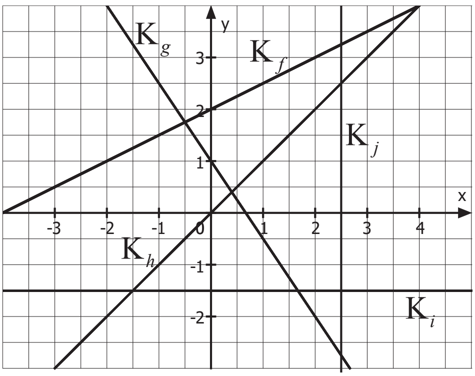
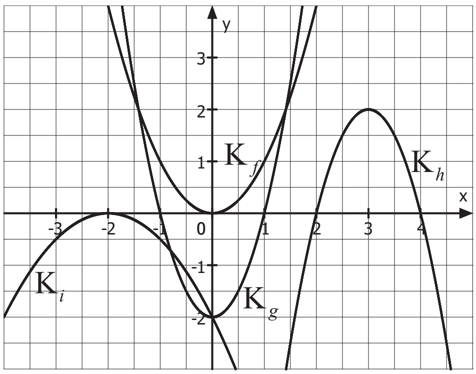
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

(S. 25)

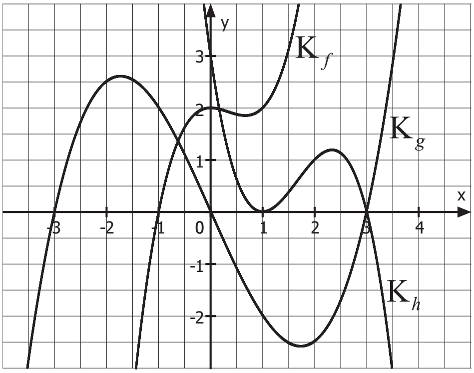
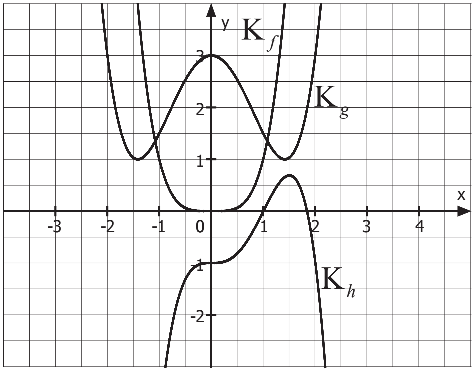


1 Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

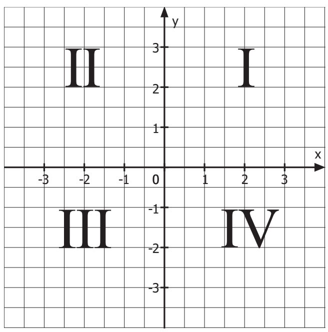
1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
Hauptform : $\boldsymbol{y = mx + b}$ Vorgehen zum Einzeichnen: $y = \frac{\text{hoch / runter}}{\text{rechts}} \cdot x + \text{y-Achsen-abschnitt}$ Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$ Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung) Senkrechte (orthogonale) Geraden: Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$ 1. Winkelhalbierende: $y = x \quad (m = 1)$ 2. Winkelhalbierende: $y = -x \quad (m = -1)$  K_f: $y = \frac{1}{2}x + 2$ $\quad$ K_g: $y = -\frac{3}{2}x + 1$ K_h: $y = x$ (1. Winkelhalbierende) K_i: $y = -1{,}5$ $\quad$ K_j: $x = 2{,}5$	**Allg.:** $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s \mid y_s)$ $a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I $a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid c)$ Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)  K_f: $f(x) = x^2$ $\quad$ K_g: $g(x) = 2x^2 - 2$ K_h: $h(x) = -2(x-3)^2 + 2$ K_i: $i(x) = -0{,}5x^2 - 2x - 2$

www.mvurl.de/fdub

3. Grades	**4. Grades**
Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$	**Allg.:** $\boldsymbol{f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$
$a > 0$: Verlauf von III nach I	$a > 0$: Verlauf von II nach I
$a < 0$: Verlauf von II nach IV	$a < 0$: Verlauf von III nach IV
Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid d)$	Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid e)$
Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)	Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)
	
K_f: $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ K_g: $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$ K_h: $h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$	K_f: $f(x) = x^4$ K_g: $g(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2 + 3$ K_h: $h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$

Tipp (für alle ganzrationalen Funktionen)
$\boldsymbol{a > 0}$: Verlauf von ... nach **I** („endet **oben**“)
$\boldsymbol{a < 0}$: Verlauf von ... nach **IV** („endet **unten**“)

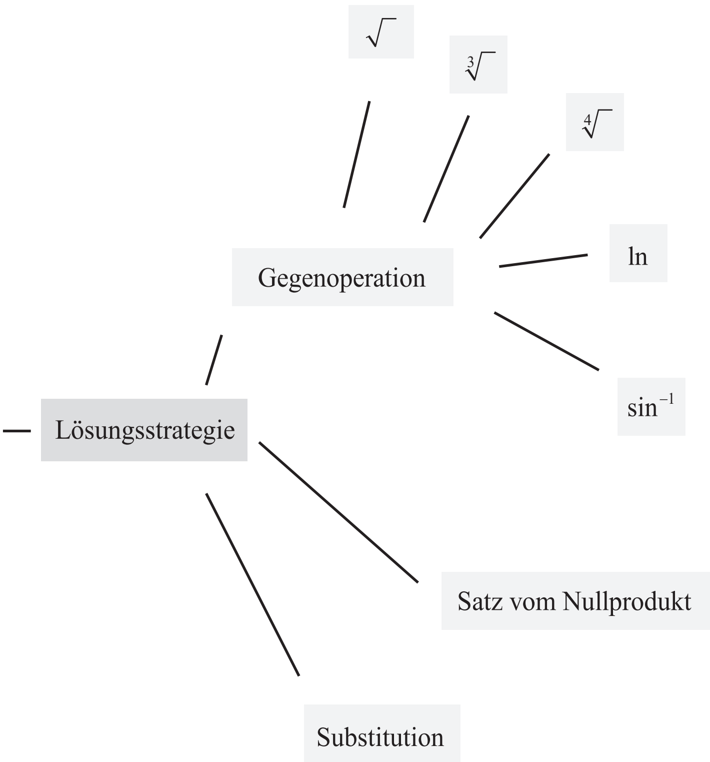
Die Quadranten



Gleichungen

- Typ
  - 1. Grades
    $2x-4=0$
    (S. 30)
  - 2. Grades
    $2x^2-4=0$
    (S. 30)
  - 3. Grades
    $2x^3-4=0$
    (S. 30)
  - 4. Grades
    $2x^4-4=0$
    (S. 31)
  - Exponentialgleichung
    $e^x=0,5$
    (S. 31)
  - Trigonometrische Gleichung
    $\sin(x)=0,5$
    (S. 32-35)
- Lineare Gleichungssysteme

  (S. 78)


$\sqrt{}$
$\sqrt[3]{}$
$\sqrt[4]{}$
ln
Gegenoperation
$\sin^{-1}$
Lösungsstrategie
Satz vom Nullprodukt
Substitution

2 Gleichungen

2.1 Gleichungstypen: Übersicht

	Typ 1	**Typ 1S**
Gleichung 1. Grades (linear) (S. 30)	$2x-4=0$	
Gleichung 2. Grades (quadratisch) (S. 30)	$2x^2-4=0$	
Gleichung 3. Grades (S. 30)	$2x^3-4=0$	
Gleichung 4. Grades (S. 31)	$2x^4-4=0$	
Exponentialgleichung (S. 31)	$e^x=0{,}5$ oder $e^{2x-1}=0{,}5$	
Sinusgleichung (S. 32)	$\sin(x)=0{,}5$	$\sin(2x-1)=0{,}5$
Kosinusgleichung (S. 32)	$\cos(x)=0{,}5$	$\cos(2x-1)=0{,}5$
Merkmal	umformbar auf $\left\{\begin{matrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ e^x \text{ oder } e^{\text{„nicht nur }x\text{“}} \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{matrix}\right\} = \ldots$	umformbar auf $\left\{\begin{matrix} \sin(\text{„}\textit{nicht nur } x\text{“}) \\ \cos(\text{„}\textit{nicht nur } x\text{“}) \end{matrix}\right\} = \ldots$
Lösungsstrategie	**Gegenoperation** $\left\{\begin{matrix} : \\ \sqrt{} \\ \sqrt[3]{} \\ \sqrt[4]{} \\ \ln \\ \sin^{-1} \\ \cos^{-1} \end{matrix}\right\}$	**Substitution:** $u=$ „*nicht nur x*“ **führt zu** $\left\{\begin{matrix} \mathbf{\sin(u)} \\ \mathbf{\cos(u)} \end{matrix}\right\} = \ldots$; Trig. Gleichung vom Typ 1 lösen; **Rücksubstitution**

Abkürzung: ... steht für eine Zahl.

www.mvurl.de/hutq

Typ 2	**Typ 3**	**Typ S**
$2x^2 - 4x = 0$	$x^2 - 8x + 15 = 0$	
$2x^3 - 4x = 0$		
$2x^4 - 4x = 0$		$x^4 - 8x^2 + 15 = 0$
$2e^{2x} - e^x = 0$		$e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$
Alle Summanden enthalten mindestens x (bzw. e^x/ $\sin(x)$/ $\cos(x)$). Kein Summand besteht nur aus einer „Zahl“. Somit kann „etwas mit x“ ausgeklammert werden.	umformbar auf $\ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$	umformbar auf $\left.\begin{cases} \ldots x^4 & + \quad \ldots x^2 \quad + \ldots \\ \ldots e^{2x} & + \quad \ldots e^x \quad + \ldots \end{cases}\right\} = 0$
(evtl.) Ausklammern; **Satz vom Nullprodukt** (S. 36)	**abc -** bzw. **pq - Formel**	**Substitution führt zu $\ldots u^2 + \ldots u + \ldots = 0$;** abc- bzw. pq-Formel; **Rücksubstitution**

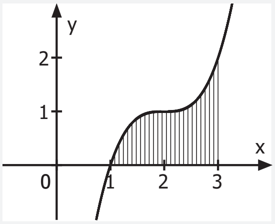
Bemerkung: Eine Gleichung, die keinem dieser Gleichungstypen zuordenbar ist, kann in der Regel nicht „von Hand“ gelöst werden.

„Aufleitungsregeln“
$f(x) =$
$\mathrm{F}(x) =$

(S. 62)

Fläche zwischen
Schaubild und
x-Achse

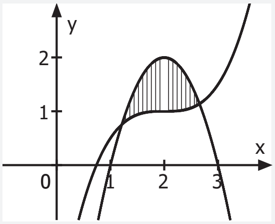
(S. 64)



Integralrechnung

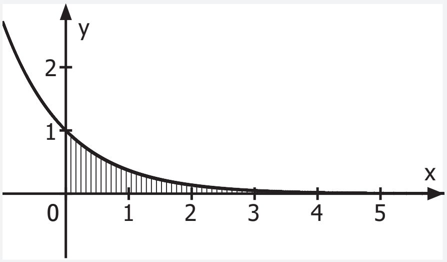
Fläche zwischen
2 Kurven

(S. 66)



Uneigentliche Integrale

(S. 71)

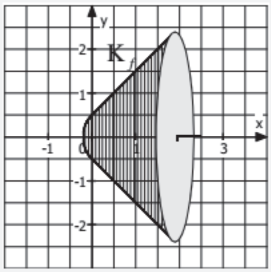


Anwendungen

(S. 72)

Rotation um die x-Achse

(S. 68)



Mittelwert

$$\overline{\mathrm{m}} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

(S. 70)

4 Integralrechnung

4.1 Integrationsregeln („Aufleitungsregeln“)

Nr.	Beispiel	Vorgehen
	Elementarregeln	
1	$f(x)=x^5$ $F(x)=\frac{1}{6}x^6$ $f(x)=x^2$ $F(x)=\frac{1}{3}x^3$	$f(x)\ =x^{Exponent}$ $F(x)\ =\frac{1}{Exponent+1}\cdot x^{Exponent+1}$ (Potenzregel)
2	$f(x)=e^x$ $F(x)\ =e^x$	*Abschreiben*
3	$f(x)=\frac{1}{x}$ (für $x>0$) $F(x)\ =\ln(x)$	*Dran denken!*
4	$f(x)=\sin(x)$ $F(x)\ =-\cos(x)$	$\begin{array}{ccc} & \sin & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ -\cos & & \cos \\ \searrow & & \nearrow \\ & -\sin & \end{array}$ (*Gegen den Uhrzeigersinn!*)
5	$f(x)\ =\cos(x)$ $F(x)\ =\sin(x)$	
	Vorgehensregeln	
6	$f(x)=\mathbf{2}\cdot x^2$ $F(x)=\mathbf{2}\cdot\frac{1}{3}x^3=\frac{2}{3}x^3$	*„Zahlen“ mit* $\cdot$ *oder* : *„bleiben“* (Faktorregel)
7	$f(x)=x^2\ \mathbf{+2}$ $F(x)=\frac{1}{3}x^3\ \mathbf{+2x}$	*„Zahlen“ mit* + *oder* − *„erhalten ein* x*“*
8	$f(x)=x^2-4x$ $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2$	+ *und* − *Zeichen unterteilen die Funktion in Teilfunktionen, welche einzeln aufgeleitet werden* (Summenregel)

www.mvurl.de/fift

Nr.	**Beispiel**	**Vorgehen**
	Produktregel	
9	$f(x) = x^2 \cdot e^x$ $\mathrm{F}(x) = ?$	Die Produktregel zum Aufleiten (partielle Integration) wird im Abitur nicht verlangt.

	Anwendungen der Kettenregel	
10	$f(x) = e^{2x+3}$ $\mathrm{F}(x) = e^{2x+3} \cdot \frac{1}{2}$	$f(x) = e^{Exponent}$ $\mathrm{F}(x) = e^{Exponent} \cdot \frac{1}{Exponent\ abgeleitet}$
11	$f(x) = \frac{1}{2x-6} \quad (x > 3)$ $\mathrm{F}(x) = \ln(2x-6) \cdot \frac{1}{2}$	$f(x) = \frac{1}{Nennerterm}$ $\mathrm{F}(x) = \ln(Nennerterm) \cdot \frac{1}{Nennerterm\ abgeleitet}$
12	$f(x) = \sin(2x+3)$ $\mathrm{F}(x) = -\cos(2x+3) \cdot \frac{1}{2}$	$f(x) = \sin(Klammerinhalt)$ $\mathrm{F}(x) = -\cos(Klammerinhalt) \cdot \frac{1}{Klammerinhalt\ abgeleitet}$
13	$f(x) = \cos(2x+3)$ $\mathrm{F}(x) = \sin(2x+3) \cdot \frac{1}{2}$	$f(x) = \cos(Klammerinhalt)$ $\mathrm{F}(x) = \sin(Klammerinhalt) \cdot \frac{1}{Klammerinhalt\ abgeleitet}$
14	$f(x) = (2x+3)^5$ $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{6} \cdot (2x+3)^6 \cdot \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{12} \cdot (2x+3)^6$	$f(x) = (Klammerinhalt)^{Exponent}$ $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{Exponent+1} \cdot (Klammerinhalt)^{Exponent+1} \cdot \frac{1}{Klammerinhalt\ abgeleitet}$

Annahme: *Klammerinhalt* bzw. *Exponent* ist linear („enthält nur x, also kein $x^2, e^x, \ldots$“)

Hinweis: Integrationskonstante

Eine Funktion hat nur eine Ableitungsfunktion, aber **unendlich viele Stammfunktionen**, da der hintere Summand $\boldsymbol{c}$ (Integrationskonstante) beim Ableiten verschwindet.

Allg.: $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \boldsymbol{c}$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x^3 \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2 \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3$$

$$\nwarrow \quad \uparrow \quad \nearrow$$

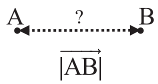
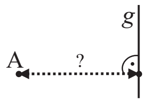
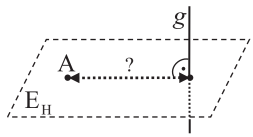
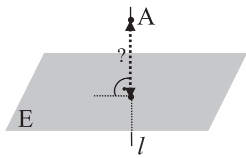
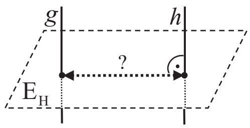
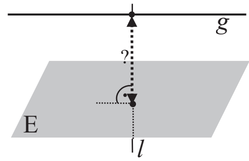
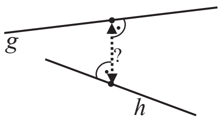
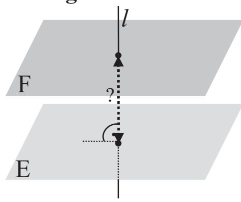
$$f(x) = x^2$$

$$\downarrow$$

$$f'(x) = 2x$$

7 Abstandsberechnungen

Lösungsstrategien im Überblick (ausführliches Vorgehen auf den folgenden Seiten)

	Punkt	**Gerade**	**Ebene**
Punkt	**Betrag** 	**1. Skalarprodukt**  **2. Hilfsebene** 	**1. Formel** $d=\left\lvert\frac{n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3-b}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\right\rvert=\left\lvert\frac{(\vec{a}-\vec{p})\cdot\vec{n}}{\lvert\vec{n}\rvert}\right\rvert$ **2. Lotgerade** 
Gerade		Parallel: **1. Skalarprodukt** **2. Hilfsebene**  *siehe Punkt-Gerade*	Parallel: **1. Formel** (Punkt-Ebene) **2. Lotgerade**  *siehe Punkt-Ebene*
		Windschief: Nicht relevant für das Abitur! 	
Ebene			Parallel: **1. Formel** (Punkt-Ebene) **2. Lotgerade**  *siehe Punkt-Ebene*

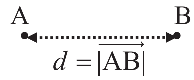
Hinweis: Alle Probleme lassen sich auf ***Punkt-Gerade*** oder ***Punkt-Ebene*** zurückführen.

www.mvurl.de/honf

7.1 Abstände zu einem Punkt

Abstand: Punkt – Punkt

Beispiel: Abstand von $A(1|0|2)$ und $B(2|-3|1)$?



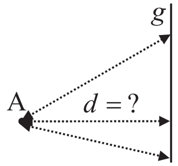
Verbindungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$;

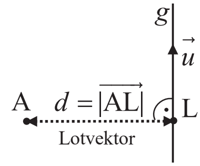
Länge: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$ LE

Abstand: Punkt – Gerade

Beispiel: Abstand von $A(6|-6|9)$ zu $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

- **Möglichkeit 1 (Skalarprodukt)**





Schritt 1: Verbindungsvektor zwischen dem **Punkt A** und einem **allgemeinen Geradenpunkt** $P_r(4-2r|5+r|6+r)$ aufstellen (allgemeiner Abstandsvektor).

$$\overrightarrow{AP_r} = \begin{pmatrix} 4-2r \\ 5+r \\ 6+r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r-2 \\ r+11 \\ r-3 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Skalarprodukt aus dem **Verbindungsvektor** und dem **Richtungsvektor** $\vec{u}$ der Geraden bilden und **gleich 0** setzen. (Grund: Der Verbindungsvektor wird zum Lotvektor wenn er senkrecht zur Geraden steht). Parameterwert r ermitteln.

$$\overrightarrow{AP_r} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -2r-2 \\ r+11 \\ r-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-2r-2)\cdot(-2) + (r+11)\cdot 1 + (r-3)\cdot 1 = 0 \Rightarrow r = -2$$

Schritt 3: Lotfußpunkt L erhalten, indem der **Parameterwert** in die Geradengleichung **eingesetzt** wird.

$r = -2$ einsetzen: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow L(8|3|4)$

Schritt 4: Länge (Betrag) des Lotvektors $|\overrightarrow{AL}|$ berechnen.

Lotvektor: $\overrightarrow{AL} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$; Länge: $|\overrightarrow{AL}| = \sqrt{2^2 + 9^2 + (-5)^2} = \sqrt{110}$ LE

7 Vertrauensintervalle (Konfidenzintervalle)

7.1 Vertrauensintervalle bilden

Wozu? ***Stichprobe → Gesamtheit***

Aus dem Wissen über die Ergebnisse einer *Stichprobe* schließt man auf die *Gesamtheit*.

Formel (siehe Merkhilfe)

$$\left[h - c\cdot\sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}};\ h + c\cdot\sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}} \right]$$

h: proz. Anteil in Stichprobe
n: Stichprobenumfang
c: Faktor aus Tabelle

Tabelle (identisch S. 154)

γ (Vertrauenswahrscheinlichkeit)	0,683	0,90	0,95	0,954	0,99	0,997
c (Faktor für Intervalllänge)	1 (1σ-Regel)	1,64	1,96	2 (2σ-Regel)	2,58	3 (3σ-Regel)

Vertrauens-Intervall bestimmen

Beispiel 1: Eine Woche vor der Bundestagswahl werden 200 Personen befragt, ob sie eine bestimmte Partei wählen werden (*Stichprobe*). 68 Befragte bejahen dies.
Welchen prozentualen Stimmenanteil p wird die Partei bundesweit haben (*Gesamtheit*)?
Geben Sie hierzu ein Vertrauensintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,4 % an.

1. Ermitteln von ***h*** (relative Häufigkeit) und ***n***. Bestimmung von ***c*** aus der Tabelle.

$h = \frac{68}{200} = 0{,}34$; $n = 200$; Tabelle: $\gamma = 0{,}954 \rightarrow c = 2$

2. Einsetzen in die **Formel**.

$$\left[0{,}34 - 2\cdot\sqrt{\frac{0{,}34\cdot(1-0{,}34)}{200}};\ 0{,}34 + 2\cdot\sqrt{\frac{0{,}34\cdot(1-0{,}34)}{200}} \right] = [0{,}273;\ 0{,}407]$$

3. Antwort

Zu 95,4 % wird das Ergebnis der Partei bei der nächsten Wahl zwischen 27,3 % und 40,7 % liegen.

Hinweis: Vertrauensintervalle berechnet man **bei binomialverteilten** Problemstellungen.

Beispiel 2: Um zu ermitteln, ob die Mikro AG ein zuverlässiger Lieferant ist, bestellt ein Kunde probehalber 300 Mikrochips (*Stichprobe*). 114 davon sind fehlerhaft.
Der Kunde möchte die (grundsätzliche) Wahrscheinlichkeit (p) dafür abschätzen, dass ein bei der Mikro AG hergestellter Chip fehlerhaft ist (*Gesamtheit*).
Geben Sie ein Intervall an, in welchem p mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt.

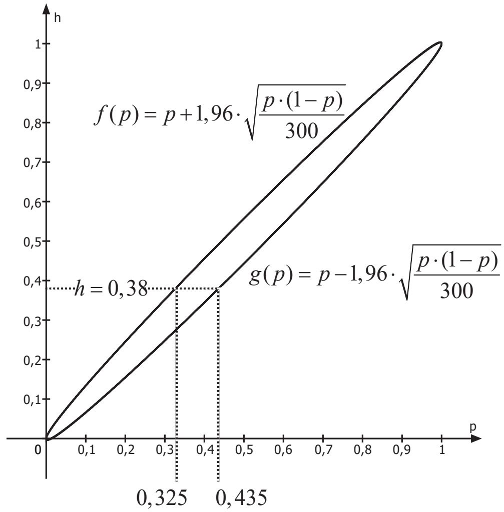
1. $h = \frac{114}{300} = 0{,}38 \qquad n = 300; \qquad$ Tabelle: $\gamma = 0{,}95 \to c = 1{,}96$

2. $\left[0{,}38 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}38 \cdot (1-0{,}38)}{300}};\ 0{,}38 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}38 \cdot (1-0{,}38)}{300}}\right] = [0{,}325;\ 0{,}435]$

3. Zu 95 % liegt die (grundsätzliche) Defektwahrscheinlichkeit eines Chips zwischen 32,5 % und 43,5 %.

Zusatz: Grafische Darstellung an der Konfidenzellipse

Die Schaubilder der beiden Funktionen f und g bilden eine Ellipse.
Die Gerade $h = 0{,}38$ gibt die relative Häufigkeit in der Stichprobe an.
Durch den Schnitt der Geraden mit den Schaubildern erhält man die beiden Grenzen des Vertrauensintervalls.



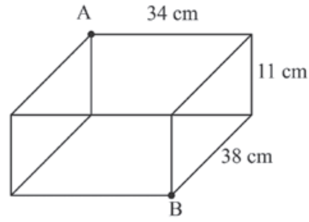
Verständnis

Grundsätzlich wird ein **„kurzes" Vertrauensintervall** angestrebt, welches p präzise eingrenzt.
Hierzu sollten, bei Betrachtung der Formel, ein **hoher Stichprobenumfang n** und eine eher **geringe Vertrauenswahrscheinlichkeit γ** gewählt werden.
Grafisch gesehen erhält man hierdurch eine „schmale" Ellipse, welche dann auf ein „kurzes" Vertrauensintervall führt.

3 Beispiele

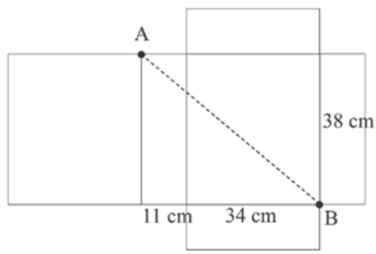
Beispiel 1

Eine Spinne befindet sich im Punkt A und möchte auf einer geschlossenen Schachtel nach B krabbeln. Sie kann Flächen queren oder Kanten entlang krabbeln. Ermitteln Sie die Länge des kürzesten Weges.



Lösung

Perspektivwechsel:
Am Körpernetz der Schachtel ist zu sehen, dass zur Berechnung der gesuchten Strecke der Satz des Pythagoras angewendet werden kann.



$$x^2 = (34+11)^2 + 38^2$$
$$x^2 = 2025 + 1444$$
$$x^2 = 3469$$
$$x \approx 58{,}90 \quad (x = -58{,}90 \text{ nicht relevant})$$

Alternativ: Beispielsweise kann auch über eine maßstabsgerechte Zeichnung eine Näherungslösung erhalten werden.

Die Spinne hat den kürzesten Weg von ca. 58,90 cm.

Beispiel 2

Die Verbindungsstrecken zweier nicht benachbarter Eckpunkte eines Vielecks werden Diagonalen genannt. Beispielsweise gibt es im Viereck zwei Diagonalen. Wie viele Diagonalen hat ein 100-Eck?

Lösung

Anhand von Beispielen (Mustererkennung) wird eine Formel zur Berechnung der Anzahl der Diagonalen im n -Eck ermittelt:

5-Eck: Von jeder der 5 Ecken gehen zwei Diagonalen ab, da die Ecke nicht mit sich selbst, sowie nicht mit den beiden benachbarten Ecken verbunden ist.
Dies führt zunächst auf 10 Diagonalen, wobei jede Diagonale jedoch doppelt berücksichtigt wird, da sie ja zwei Punkte verbindet.

Anzahl Diagonalen im 5-Eck: $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$

9-Eck: Von jeder der 9 Ecken gehen 6 (= 9 - 3) Diagonalen ab, wobei so wiederum jede Diagonale doppelt berücksichtigt wird.

Anzahl Diagonalen im 9-Eck: $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$

***n*-Eck (Verallgemeinerung):** Von jeder der n Ecken gehen $(n-3)$ Diagonalen ab, wobei so wiederum jede Diagonale doppelt berücksichtigt wird.

Anzahl Diagonalen im n-Eck: $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$

Bei einem 100-Eck gibt es also $\frac{100 \cdot 97}{2} = 4850$ Diagonalen.

Aufgabe 63 : Berechnen Sie den Abstand.

a) Zwischen $Q(0|2|-1)$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

b) Zwischen $A(-3|0|1)$ und $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$

c) Zwischen $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E: -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2$

2.9 Modellieren mit Vektoren

Aufgabe 64 : Ein U-Boot bewegt sich nach der Bahngleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -3{,}75 \end{pmatrix}$ (t in Stunden, sonstige Angaben in km).

Die x_1x_2-Ebene stellt die Wasseroberfläche des Meeres dar.

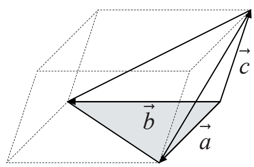
a) Befindet sich das U-Boot auf einer Steig- oder Sinkfahrt?

b) Welche Geschwindigkeit hat es?

c) Nach wie vielen Stunden hat das U-Boot eine Tiefe von 9,5 km?

2.10 Das Vektorprodukt zur Flächen- und Volumenberechnung

Aufgabe 65 : Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$



spannen, wie grafisch dargestellt, eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche auf.
Berechnen Sie deren Volumen.

3 Basisübungen zur Stochastik

3.1 Baumdiagramm und Pfadregeln

Aufgabe 66: In einer Urne befinden sich 3 blaue, 4 rote und 5 grüne Kugeln.
Es werden 3 Kugeln nacheinander gezogen. Gezogene Kugeln werden zurückgelegt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

a) Man erhält 3 Kugeln der gleichen Farbe.

b) Man erhält genau eine rote Kugel.

c) Man erhält 3 Kugeln mit verschiedenen Farben.

d) Man erhält zuerst eine grüne Kugel und dann 2 blaue Kugeln.

e) Man erhält mindestens eine grüne Kugel.

Aufgabe 67: In einem Stapel aus 13 Karten befinden sich 4 Asse, 2 Könige, 4 Damen und 3 Buben. Ein Spieler hebt zwei Karten ab.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

a) Der Spieler erhält kein Ass.

b) Der Spieler erhält höchstens ein Ass.

c) Der Spieler erhält genau einen König.

d) Der Spieler erhält ein Ass und einen Bube.

Aufgabe 68: In einer Urne befinden sich 10 blaue, 10 rote und 10 grüne Kugeln.
Wie viele Kugeln muss man mindestens (mit zurücklegen) entnehmen, sodass die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen, mindestens 98 % beträgt?

3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel

Aufgabe 69: An einer Schule sind 24 % der Autos alt. 18 % der Autos sind schmutzig.
65 % der Autos sind weder alt noch schmutzig.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Auto alt und schmutzig?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Auto alt oder schmutzig?

c) Man sieht ein altes Auto. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es schmutzig?