„Sie müssen das Buch so schreiben, dass alles drin ist, aber man es trotzdem versteht!“
(Aufforderung einer Schülerin)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.
- eine gute Note in der Abiturprüfung zu erreichen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.
- den Notendurchschnitt Ihrer Klasse in der Abiturprüfung zu optimieren.

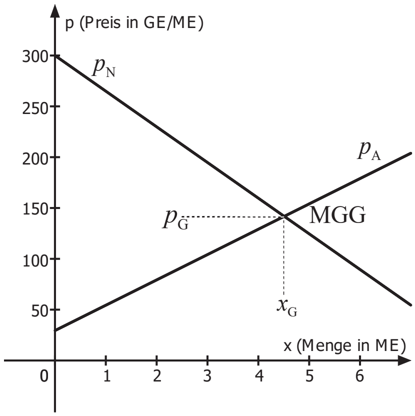
EXTRA

100 Videos des Autors, welche zu 69 Themenvideos zusammengestellt wurden. Hier werden alle Stoffzusammenfassungen nochmals erklärt.
Zugriff auf die Themenvideos über Kurzadresse oder QR-Code aus dem Buch.

Inhaltsverzeichnis

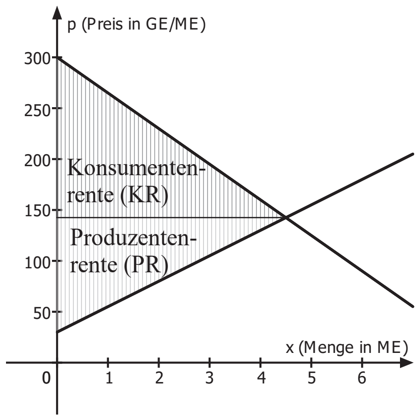
2. Analysis im wirtschaftlichen Kontext (Grundlagen)

2.1 Monopol vs. Polypol: Einordnung und Ausblick

<table>
<tr><th>(Angebots-) Monopol</th><th>Polypol (vollständige Konkurrenz)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Begriff</td></tr>
<tr><td>Ein Anbieter (Monopolist)
Viele Nachfrager</td><td>Viele Anbieter
Viele Nachfrager</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grundsätzlicher Unterschied: Bildung des Preises</td></tr>
<tr><td>Monopolist setzt den Preis fest, welcher für ihn optimal ist.</td><td>Preis bildet sich durch Angebot und Nachfrage am Markt.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Wie bildet sich der Preis?</td></tr>
<tr><td>Monopolist berechnet den Preis, bei welchem er den maximalen Gewinn erzielt und legt diesen fest.
(S. 63)</td><td>Durch den Schnittpunkt der Angebotsfunktion p_A und der Nachfragefunktion p_N ergibt sich der Gleichgewichtspreis p_G.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Allgemeiner Aufbau der Erlösfunktion?</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{E}(x) = p_N(x) \cdot x$
(mit $p_N(x)$: Preis-Nachfrage-Funktion)</td><td>$\mathrm{E}(x) = p_G \cdot x$
(Preis ist nach Bildung am Markt fest.)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Optimale Verkaufsmenge für den Anbieter?</td></tr>
<tr><td>Bei der Berechnung des Preises (s. o.) berechnet der Monopolist auch die die gewinnoptimale Verkaufsmenge.
(S. 63)</td><td>Anhand des nun festen Preises (s. o.) berechnet der Anbieter die für ihn gewinnoptimale Verkaufsmenge.
(S. 62)</td></tr>
</table>

http://www.mvurl.de/mr2e

Weitere typische Fragestellungen

(Angebots-) Monopol	Polypol (vollständige Konkurrenz)
Kostenanalyse	
Betriebsminimum (kurzfristige Preisuntergrenze) bzw. Betriebsoptimum (langfristige Preisuntergrenze) (S. 61 - 61)	
Gewinnanalyse	
mit Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$ $= p_N(x) \cdot x - K(x)$	mit Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$ $= p_G \cdot x - K(x)$
Produzenten- und Konsumentenrente	
	 (S. 76)

2.2 Relevante Funktionen: Aussagekraft und Zusammenhang

Hier sind wesentliche Funktionen dargestellt, die im wirtschaftlichen Kontext eine Rolle spielen. Die Aussagekraft der Funktionen und deren Zusammenhang zu verstehen, erleichtert die Bearbeitung der Problemstellungen in den Kapiteln 5 und 7.

Bezeichnung und Beispiel	Aussagekraft (am Beispiel)
Fixe Kosten $\mathbf{K}_{fix} = 100$	Im Betrieb fallen 100 GE an fixen Kosten (Miete, Zinsen, …) an, unabhängig davon welche Menge produziert wird.
Variable Gesamtkostenfunktion $\mathbf{K}_V(\boldsymbol{x}) = 2x^3 + 3x^2 + x$	$K_V(8) = 1224$ Durch die Herstellung von 8 ME, fallen 1224 GE an variablen Kosten (Material, …) an.
Gesamtkostenfunktion $\mathbf{K}(\boldsymbol{x}) = 2x^3 + 3x^2 + x + 100$ $(\mathbf{K}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{K}_{fix} + \mathbf{K}_V(\boldsymbol{x}))$	$K(8) = 1324$ Wenn 8 ME hergestellt werden, fallen hierfür insgesamt 1324 GE an Kosten (fix + variabel) an.
Grenzkosten $\mathbf{K}'(\boldsymbol{x}) = 6x^2 + 6x + 1$	$K'(2) = 30$ Wenn ausgehend von 2 ME eine (minimale) ME mehr produziert wird, führt diese zu Mehrkosten von 30 GE pro ME.

Variable Stückkostenfunktion $\boldsymbol{k}_V(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{K}_V(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}} = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x}$ $= 2x^2 + 3x + 1$	$k_V(8) = \frac{1224}{8} = 153$ Wenn 8 ME hergestellt werden, fallen hierfür **pro Stück** 153 GE an variablen Kosten an.
Stückkostenfunktion (Durchschnittskosten) $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{K}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}} = \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 100}{x}$ $= 2x^2 + 3x + 1 + \frac{100}{x}$	$k(8) = \frac{1324}{8} = 165,5$ Wenn 8 ME hergestellt werden, fallen hierfür **pro Stück insg.** 165,5 GE an Kosten an.

Bezeichnung und Beispiel	Aussagekraft (am Beispiel)
Angebotsfunktion (bei Polypol) $\boldsymbol{p_A(x)} = 2x+5$	$p_A(8) = 21$ Bei einem Stückpreis von 21 GE werden 8 ME am Markt angeboten.
Nachfragefunktion (bei Polypol) bzw. **Preis-Absatz-Funktion (bei Monopol)** $\boldsymbol{p_N(x)} = 200-5x$	$p_N(8) = 160$ Bei einem Stückpreis von 160 GE werden 8 ME am Markt nachgefragt.

Erlösfunktion bei Polypol $\mathbf{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} = 150\cdot x$ (bei Preis $p=150$) **Erlösfunktion bei Monopol** $\mathbf{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p_N(x)}\cdot\boldsymbol{x} = (200-5x)\cdot x$ (bei Nachfragefunktion $p_N(x) = 200-5x$)	$\mathrm{E}(8) = 1200$ bzw. $\mathrm{E}(8) = 1280$ Wenn 8 ME verkauft werden erwirtschaftet der Betrieb einen Umsatz/Erlös von 1200 bzw. 1280 GE.
Gewinnfunktion bei Polypol $\mathbf{G}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{K}(\boldsymbol{x})$ $= 150x-(2x^3+3x^2+x+100)$ $= -2x^3-3x^2+149x-100$ **Gewinnfunktion bei Monopol** $\mathbf{G}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{K}(\boldsymbol{x})$ $= (200-5x)\cdot x-(2x^3+3x^2+x+100)$ $= -2x^3-8x^2+199x-100$	$\mathrm{G}(5) = 325$ bzw. $\mathrm{G}(5) = 445$ Wenn 8 ME verkauft werden erwirtschaftet der Betrieb insgesamt einen Gewinn von 325 bzw. 445 GE.

Deckungsbeitragsfunktion $\mathbf{DB}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{K_V}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{G}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{K}_{\boldsymbol{fix}}$ $= -2x^3-3x^2+149x$	$\mathrm{DB}(5) = 425$ Wenn 8 ME verkauft werden erwirtschaftet der Betrieb insgesamt einen Deckungsbeitrag („Gewinn ohne Berücksichtigung der Fixkosten“) von 425 GE.

4. Differenzialrechnung (allgemein)

4.1 Ableitungsregeln

Nr.	Beispiel	Vorgehen
	Elementarregeln	
1	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$ $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x^1 = 2x$ $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$f(x) = x^{Exponent}$ $f'(x) = Exponent \cdot x^{Exponent-1}$ (Potenzregel) **Vor dem Ableiten** $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
2	$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$	*Abschreiben*

8

	Vorgehensregeln	
3	$f(x) = \mathbf{3} \cdot x^2$ $f'(x) = \mathbf{3} \cdot 2x = 6x$	*„Zahlen" mit $\cdot$ oder $:$ „bleiben"* (Faktorregel)
4	$f(x) = x^2 \mathbf{+ 2}$ $f'(x) = 2x$	*„Zahlen" mit $+$ oder $-$ „verschwinden"*
5	$f(x) = x^2 - 4x$ $f'(x) = 2x - 4$	*$+$ und $-$ Zeichen unterteilen die Funktion in Teilfunktionen, welche einzeln abgeleitet werden* (Summenregel)

http://www.mvurl.de/f1xk

Nr.	Beispiel	Vorgehen
Anwendungen der Kettenregel		
7	$f(x) = (2x+3)^5$ $f'(x) = 5\cdot(2x+3)^4\cdot 2$ $= 10\cdot(2x+3)^4$ $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^5}$ $= (2x+3)^{-5}$ $f'(x) = -5\cdot(2x+3)^{-6}\cdot 2$ $= -\frac{10}{(2x+3)^6}$	$f(x) = (Klammerinhalt)^{Exponent}$ $f'(x) = Exponent\cdot(Klammerinhalt)^{Exponent-1}\cdot$ *Klammerinhalt abgeleitet*
8	$f(x) = e^{2x+3}$ $f'(x) = e^{2x+3}\cdot 2$	$f(x) = e^{Exponent}$ $f'(x) = e^{Exponent}\cdot$ *Exponent abgeleitet*

Die allgemeine Kettenregel, aus welcher sich die Regeln 7-8 ergeben, lautet:

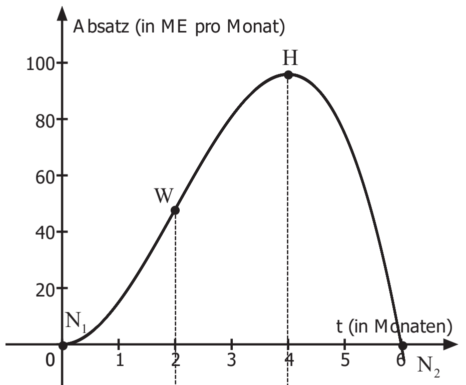
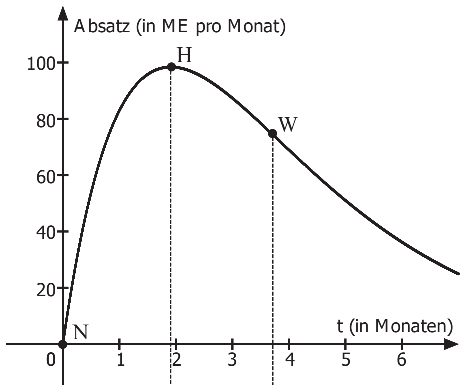
$$f(x) = u(v(x))$$

$$f'(x) = \underbrace{u'(v(x))}_{\text{Äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{Innere Ableitung}}$$

Produktregel		
9	$f(x) = x^2\cdot e^{2x}$ $f'(x) = 2x\cdot e^{2x} + x^2\cdot e^{2x}\cdot 2$	$f(x) = u(x)\cdot v(x)$ $f'(x) = \underbrace{u'(x)}_{Ableiten}\cdot\underbrace{v(x)}_{Abschreiben} + \underbrace{u(x)}_{Abschreiben}\cdot\underbrace{v'(x)}_{Ableiten}$
Quotientenregel (nur für LK)		
10	$f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}}$ $f'(x) = \frac{2x\cdot e^{2x} - x^2\cdot e^{2x}\cdot 2}{\left(e^{2x}\right)^2}$ $= \frac{2x\cdot e^{2x} - 2x^2\cdot e^{2x}}{e^{4x}}$	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

5. Differenzialrechnung (im wirtschaflichen Kontext)

5.1 Der Produktlebenszyklus

<table>
<tr><th colspan="3">Modellierung mit:
Ganzrationaler Funktion 3. Grades</th><th colspan="3">Modellierung mit:
Exponentialfunktion</th></tr>
<tr><td colspan="6">Beispiel</td></tr>
<tr><td colspan="3">Für ein Produkt liegt die Absatzfunktion A mit $A(t) = -3t^3 + 18t^2$ vor.</td><td colspan="3">Für ein Produkt liegt die Absatzfunktion A mit $A(t) = 160 \cdot t \cdot e^{-0,61t}$ vor.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Beschreibung</td></tr>
<tr><td colspan="3">Absatz beginnt langsam, erreicht Maximum, bricht dann abrupt ein.</td><td colspan="3">Absatz beginnt stark, erreicht Maximum, läuft dann langsam (asymptotisch) aus.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Am Schaubild</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td>Absatz wächst immer schneller

progressiv wachsend

$\begin{pmatrix} A'(t)>0 \\ A''(t)>0 \end{pmatrix}$</td><td>Absatz wächst immer langsamer

degressiv wachsend

$\begin{pmatrix} A'(t)>0 \\ A''(t)<0 \end{pmatrix}$</td><td>Absatz fällt immer schneller

progressiv fallend

$\begin{pmatrix} A'(t)<0 \\ A''(t)<0 \end{pmatrix}$</td><td>Absatz wächst immer langsamer

degressiv wachsend

$\begin{pmatrix} A'(t)>0 \\ A''(t)<0 \end{pmatrix}$</td><td>Absatz fällt immer schneller

progressiv fallend

$\begin{pmatrix} A'(t)<0 \\ A''(t)<0 \end{pmatrix}$</td><td>Absatz fällt immer langsamer

degressiv fallend

$\begin{pmatrix} A'(t)<0 \\ A''(t)>0 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">H</td><td colspan="2">Maximaler Absatz</td><td colspan="2">H</td></tr>
<tr><td colspan="2">W</td><td colspan="2">Maximaler Absatzzuwachs</td><td colspan="2">N</td></tr>
<tr><td colspan="2">N_2</td><td colspan="2">Maximaler Absatzrückgang</td><td colspan="2">W</td></tr>
</table>

http://www.mvurl.de/1bzt

5.2 Die ertragsgesetzliche Kostenfunktion

Beteiligte Funktionen

- **K** gibt die **Gesamtkosten** an, die bei der Herstellung von x ME entstehen.
  Ansatz: $\mathrm{K}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- **K′** gibt die **Grenzkosten**, also die Kosten, die bei Herstellung einer zusätzlichen (beliebig kleinen) Mengeneinheit entstehen, an.

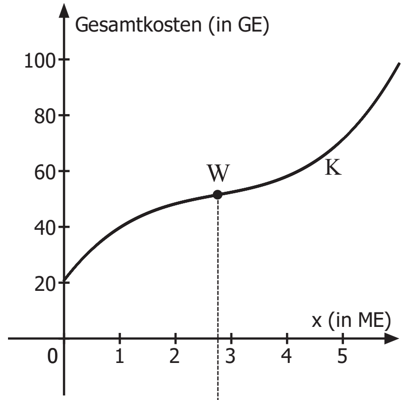
Erläuterungen

Da eine Mehrproduktion stets mit höheren Gesamtkosten verbunden ist, ist K streng monoton steigend bzw. K′ überall positiv ($\mathrm{K}'(x) > 0$).

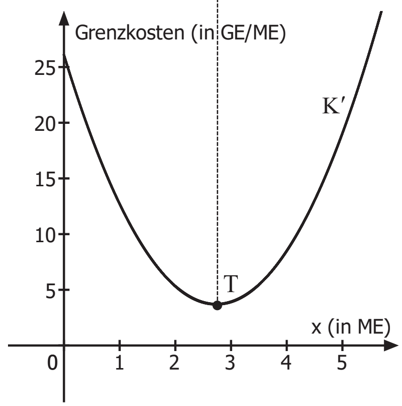
Bis zur Wendestelle fällt K′. Zusätzliche Mengeneinheiten führen zwar zu Mehrkosten, diese jedoch sinken. ($\mathrm{K}''(x) < 0$).
Es liegt **degressives Wachstum** vor.

An der Wendestelle selbst sind die Mehrkosten der nächsten Einheit minimal (Tiefpunkt bei K′).

Ab der Wendestelle steigt K′. Zusätzliche Mengeneinheiten führen zu immer höheren Mehrkosten. ($\mathrm{K}''(x) > 0$).
Es liegt **progressives Wachstum** vor.



Kosten wachsen immer langsamer	Kosten wachsen immer schneller
degressiv wachsend	**progressiv wachsend**
$\mathbf{K'(x) > 0}$ (steigende Kosten)	$\mathbf{K'(x) > 0}$ (steigende Kosten)
$\mathbf{K''(x) < 0}$ abnehmende Grenzkosten (bzw. K ist rechtsgekrümmt)	$\mathbf{K''(x) > 0}$ zunehmende Grenzkosten (bzw. K ist linksgekrümmt)



http://www.mvurl.de/i3ge

6. Der Hypothesentest

6.1 Einseitiger Hypothesentest: Ausführliche Erklärung

• **Beispiel :** Ein Basketballspieler behauptet, dass er einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75 % trifft. Sein Trainer möchte dies überprüfen und lässt ihn 8 Mal werfen. Er trifft nur 3 Mal. Sollte der Trainer die Behauptung des Spielers ablehnen?

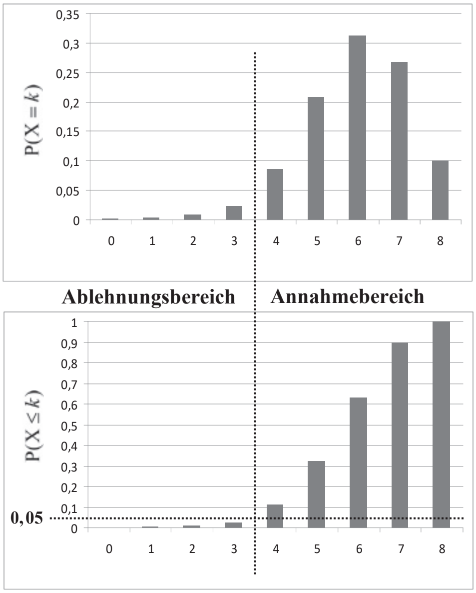
• **Vorgehen mit Hypothesentest** (beispielhaft mit Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$)

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer des Basketballspielers bei 8 Würfen an. Dessen Behauptung und damit die Nullhypothese (H_0) lautet: $p_0 \geq 0,75$. Falls diese zutrifft, beträgt die Trefferwahrscheinlichkeit im für ihn ungünstigsten Fall (Extremfall) also (nur) genau 0,75. Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert annimmt, kann mit Hilfe der Bernoulliformel berechnet werden. Somit ist X mit $n = 8$ und $p_0 = 0,75$ binomialverteilt. Die Verteilung und die zugehörige kumulierte Verteilung sind dargestellt.

Der Spieler behauptet eine Mindestwahrscheinlichkeit: Geringe Werte von X (wenige Treffer) sprechen gegen seine Behauptung. Somit muss ein linksseitiger Hypothesentest durchgeführt werden.

Aus der kumulierten Binomialverteilung ist zu entnehmen, dass die Werte $\{0;1;2;3\}$ eine Gesamtwahrscheinlichkeit von 2,73 % aufweisen, wohingegen die Werte $\{0;1;2;3;4\}$ schon eine Gesamtwahrscheinlichkeit von 11,38 % aufweisen.

Falls der Spieler wirklich eine Trefferwahrscheinlichkeit von 75 % hätte, wäre es mit 2,73 % sehr unwahrscheinlich , dass er nur höchstens 3 von 8 Freiwürfen treffen würde. Da der Wert unter 5 % (Signifikanzniveau) liegt, wird in diesem Fall davon ausgegangen, dass die behauptete Trefferwahrscheinlichkeit nicht stimmt. (Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler eine geringere Trefferwahrscheinlichkeit als 75 % hat, beträgt umgekehrt 97,27 % !).



$P(X \leq 2) = 0,0042$

$P(X \leq 3) = 0,0273$

0,05

$P(X \leq 4) = 0,1138$

$P(X \leq 5) = 0,3215$

Ablehnungsb. ($\leq 5\%$)

$\overline{A} = \{0;1;2;3\}$

$A = \{4;5;...;8\}$

Annahmebereich

Der Ablehnungsbereich für die Behauptung besteht also aus den Werten $\overline{A} = \{0;1;2;3\}$, der Annahmebereich aus den Werten $A = \{4;5;...;8\}$ (Entscheidungsregel).

• **Entscheidung :** Im Beispiel trifft der Spieler nur 3 Mal. Da diese Trefferanzahl im Ablehnungsbereich liegt, wird der Trainer die Behauptung des Spielers ablehnen.

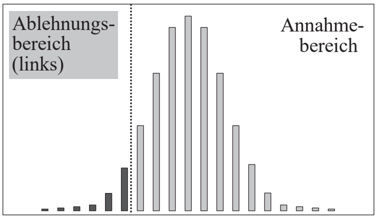
http://www.mvurl.de/q6no

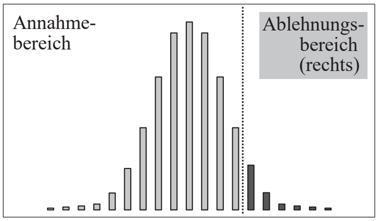
6.2 Einseitiger Hypothesentest: Vorgehen am Beispiel

Linksseitiger Hypothesentest	Rechtsseitiger Hypothesentest

1. Schritt: „Testart“ erkennen und Aufstellen der Nullhypothese.

Linksseitiger Hypothesentest	Rechtsseitiger Hypothesentest
- Behauptung: **Mindest**wahrscheinlichkeit ist gegeben (Nullhypothese H_0: $\boldsymbol{p_0} \geq ...$) - Vermutung: Wirkl. Wahrsch. ist geringer als p_0 (Gegenhypothese H_1: $p_0 < ...$) **Geringe Werte** von X sprechen **gegen die Behauptung** (bzw. für die Vermutung).	- Behauptung: **Höchst**wahrscheinlichkeit ist gegeben (Nullhypothese H_0: $\boldsymbol{p_0} \leq ...$) - Vermutung: Wirkl. Wahrsch. ist höher als p_0 (Gegenhypothese H_1: $p_0 > ...$) **Hohe Werte** von X sprechen **gegen die Behauptung** (bzw. für die Vermutung).





2. Schritt : Ablesen des Stichprobenumfangs n (Anzahl der Durchführungen) und des Signifikanzniveaus α aus der Aufgabenstellung. (z.B. $n = 30$; $\alpha = 5\%$; $p_0 = 0,4$)

3. Schritt: Ermittlung des Ablehnungs- und Annahmebereiches.

Linksseitiger Hypothesentest	Rechtsseitiger Hypothesentest
Die Wahrscheinlichkeit für **höchstens *k* Treffer** darf nicht höher als α sein:	Die Wahrscheinlichkeit für **mindestens *k* Treffer** darf nicht höher als α sein:
$\mathbf{P(X \leq \boldsymbol{k}) \leq \boldsymbol{\alpha}}$	$\mathbf{P(X \geq \boldsymbol{k}) \leq \boldsymbol{\alpha}}$
kum. BV; $\sum_{i=0}^{k} B(n; p_0; i)$	kum. BV; $\sum_{i=0}^{k} B(n; p_0; i)$
$P(X \leq 6) = 0,0172$ $P(X \leq 7) = 0,0435$ **Ablehnungsb. ($\leq 5\%$)** $\overline{A} = \{0;1;...;7\}$ **0,05** $P(X \leq 8) = 0,0940$ $P(X \leq 9) = 0,1763$ $A = \{8;9;...;30\}$ **Annahmebereich**	$P(X \leq 14) = 0,8246 \Rightarrow P(X \geq 15) = 0,1754$ $P(X \leq 15) = 0,9029 \Rightarrow P(X \geq 16) = 0,0971$ **Annahmeb.** $A = \{0;1;...;16\}$ **0,05** $P(X \leq 16) = 0,9519 \Rightarrow P(X \geq 17) = 0,0481$ $P(X \leq 17) = 0,9788 \Rightarrow P(X \geq 18) = 0,0212$ $\overline{A} = \{17;18;...;30\}$ **Ablehnungsb. ($\leq 5\%$)**

4. Schritt : Ermittlung der Entscheidungsregel. Der Vergleich mit dem konkreten Stichprobenergebnis (siehe Aufgabenstellung) führt zur Entscheidung.

Linksseitiger Hypothesentest	Rechtsseitiger Hypothesentest
Bei dem Wert 7 oder weniger wird die Hypothese abgelehnt, ansonsten angenommen.	Bei dem Wert 17 oder mehr wird die Hypothese abgelehnt, ansonsten angenommen.

http://www.mvurl.de/88it

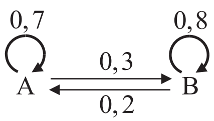
5. Stochastische Matrizen

5.1 Stochastische Austausch- bzw. Übergangsprozesse

5.1.1 Stochastische Übergangsmatrix

Beispiel: In Kaffhausen eröffnen zeitgleich zwei Discos A und B. Die Betreiber rechnen mit einer festen Anzahl an Jugendlichen, welche an jedem Samstag eine der beiden Discos besuchen.
Ein Besucher der Disco A besucht am Samstag der darauf folgenden Woche mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % wieder Disco A (und mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % Disco B.)
Ein Besucher der Disco B besucht am Samstag der darauf folgenden Woche mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % wieder Disco B (und mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % Disco A.)

Darstellungsmöglichkeiten

<table>
<tr><th>Diagramm</th><th>Tabelle</th><th>Übergangsmatrix</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>von A</td><td>von B</td></tr>
<tr><td>nach A</td><td>0,7</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>nach B</td><td>0,3</td><td>0,8</td></tr>
</table>
</td>
<td>$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$
• Stochastische Matrix mit Wahrscheinlichkeiten
• Spaltensumme = 1</td>
</tr>
</table>

Merkmale

Eine **feste Anzahl** an beteiligten Objekten (z.B. Jugendliche), bewegen sich („tauschen“) gemäß **Wahrscheinlichkeiten** schrittweise (z.B. von Woche zu Woche) zwischen verschiedenen Zuständen (Discos).

Formel

- **für einen Schritt:** $\overrightarrow{\boldsymbol{x_1}} = \mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$ (also $\overrightarrow{x_{neu}} = \mathrm{A} \cdot \overrightarrow{x_{alt}}$)
- **für *n*-Schritte:** $\overrightarrow{\boldsymbol{x_n}} = \mathbf{A}^n \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$ (z.B. $\overrightarrow{x_3} = \mathrm{A}^3 \cdot \overrightarrow{x_0}$)

Beispiel (Disco)

a) Am Eröffnungstag befinden sich 20 % der Jugendlichen in Disco A und 80 % der Jugendlichen in Disco B. Berechnen Sie die Verteilung für den ersten (auf den Eröffnungstag folgenden) Samstag.

$$\overrightarrow{x_1} = \text{A} \cdot \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix} \qquad \text{(\textbf{„Vorwärts mit Formel“})}$$

A: Am nächsten Samstag besuchen 30 % Disco A und 70 % die Disco B.

b) Berechnen Sie die Verteilung für den zweiten Samstag.

$$\overrightarrow{x_2} = \text{A} \cdot \overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,65 \end{pmatrix}$$

Alternativ $\overrightarrow{x_2}$ durch $\overrightarrow{x_2} = \text{A}^2 \cdot \overrightarrow{x_0}$ berechnen:

$$\text{A}^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,3 \\ 0,45 & 0,7 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{x_2} = \text{A}^2 \cdot \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,3 \\ 0,45 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,65 \end{pmatrix}$$

c) Interpretieren Sie die Einträge der Matrix $\text{A}^2 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,3 \\ 0,45 & 0,7 \end{pmatrix}$.

Z.B. 1. Spalte: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Jugendlicher, der heute Disco A besucht, in 2 Wochen wieder Disco A besucht, beträgt 55 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass er in 2 Wochen Disco B besucht, beträgt 45 %.

d) An einem Samstag besuchen 70 Jugendliche die Disco A und 130 Jugendliche die Disco B. Berechnen Sie hieraus die Besuchszahlen in der Vorwoche.

Einsetzen in $\text{A} \cdot \overrightarrow{x_{\text{alt}}} = \overrightarrow{x_{\text{neu}}}$. Hierbei $\overrightarrow{x_{\text{alt}}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 200 - x_1 \end{pmatrix}$ da insg. 200 Jugendliche beteiligt sind:

$$\text{A} \cdot \overrightarrow{x_{\text{alt}}} = \overrightarrow{x_{\text{neu}}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 200 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 130 \end{pmatrix} \qquad \text{(\textbf{„Rückwärts mit LGS“})}$$

Ausmultiplizieren ergibt ein **LGS**. Da nur eine Unbekannte vorhanden ist, wird nur die erste Zeile berücksichtigt: $0,7x_1 + 0,2 \cdot (200 - x_1) = 70 \Rightarrow 0,5x_1 = 30 \Rightarrow x_1 = 60$

Berechnung von x_2: $x_2 = 200 - x_1 = 200 - 60 = 140$

A: In der Vorwoche waren 60 Jugendliche in Disco A und 140 in Disco B.

Hinweis: Alternativer Lösungsweg durch $\overrightarrow{x_{\text{alt}}} = \text{A}^{-1} \cdot \overrightarrow{x_{\text{neu}}}$ (mit **inverser Matrix**, S. 170)

Rechnen

„Vorwärts“: Einsetzen in **Formel**

„Rückwärts“: **LGS** (oder Inverse)

6. Lineare Optimierung

6.1 Grafisches Lösungsverfahren

6.1.1 Vorgehen bei Maximierungsproblemen

Beispiel

Klara möchte sich auf die beiden anstehenden Klausuren in Englisch und Mathe vorbereiten. Welche Notenpunktzahl sie hierbei in den einzelnen Fächer erhält ist ihr egal. Es ist jedoch ihr Ziel, eine möglichst hohe Gesamtnotenpunktzahl aus den beiden Klausuren zu erreichen. Klara weiß, dass sie durch jede Stunde, in welcher sie sich auf Englisch vorbereitet, in der Klausur 1,25 Notenpunkte erreicht. Jede Vorbereitungsstunde in Mathe führt sogar zu 1,5 Notenpunkten.

Insgesamt möchte sie sich höchstens 10 Stunden auf die beiden Fächer vorbereiten.

Zudem hat Klara eine persönliche „Frustgrenze“ von 24 „Frustpunkten“. In jeder Stunde, in der sie sich auf Englisch vorbereitet, kommen 1,5 „Frustpunkte“ hinzu. Jede Vorbereitungsstunde in Mathe führt zu 3 weiteren „Frustpunkten“.

Welche Vorbereitungszeit sollte Klara für Englisch bzw. für Mathe aufwenden?

1. **Entscheidungsvariablen**

   x - Vorbereitungszeit für Englisch (in Stunden)
   y - Vorbereitungszeit für Mathe (in Stunden)

2. **Nebenbedingungen (Restriktionen) und Planungsbereich**

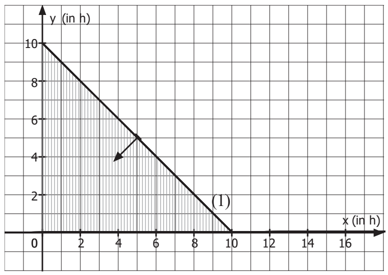
   Nichtnegativität (Keine negative Vorbereitungszeit möglich)

   $\boldsymbol{x \geq 0}$ und $\boldsymbol{y \geq 0}$

   Nebenbedingung 1 (Gesamtvorbereitungszeit)

   $x + y \leq 10 \quad | -x$

   $\boldsymbol{y \leq -x + 10} \quad \textbf{(1)}$



   Jeder Punkt im Koordinatensystem steht für eine bestimmte Vorbereitungszeit in den beiden Fächern. Alle Punkte im markierten Bereich (unterhalb der **Randgeraden (1)**) führen zu einer insgesamten Vorbereitungszeit von höchstens 10 Stunden.

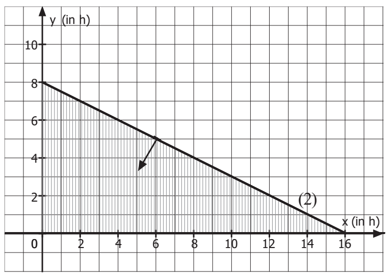
   Nebenbedingung 2 („Frustgrenze“)

   $1{,}5 \cdot x + 3 \cdot y \leq 24 \quad | -1{,}5x$

   $3y \leq -1{,}5x + 24 \quad |:3$

   $\boldsymbol{y \leq -0{,}5x + 8} \quad \textbf{(2)}$

   Alle Punkte im markierten Bereich führen zu höchstens 24 „Frustpunkten“.

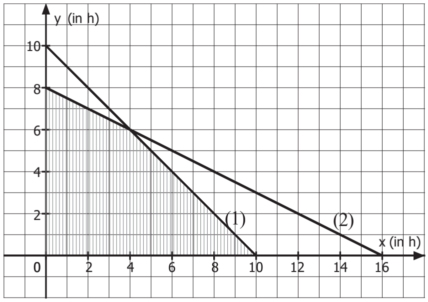


Nebenbedingungen nach *y* auflösen und einzeichnen!

http://www.mvurl.de/fmo7

Resultierender Planungsbereich

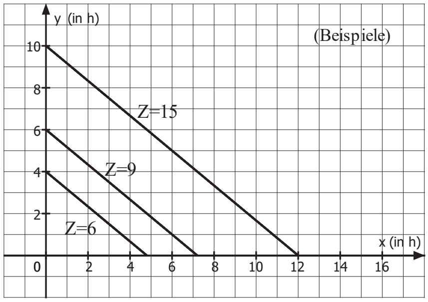
Alle Punkte im Planungsbereich sind für Klara möglich, da sie beide Nebenbedingung erfüllen.



Der **Planungsbereich** beinhaltet alle Punkte, die **möglich** sind.

3. Zielfunktion (Gesamtnotenpunktzahl)

$$Z = 1,25 \cdot x + 1,5 \cdot y \qquad |-1,5y$$
$$Z - 1,5y = 1,25x \qquad |-Z$$
$$-1,5y = 1,25x - Z \qquad |:(-1,5)$$
$$\boldsymbol{y = -\frac{5}{6}x + \frac{Z}{1,5}}$$

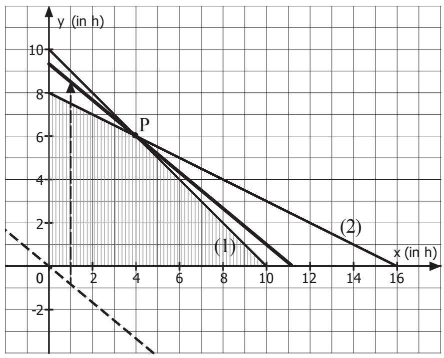


Alle zueinander parallele Geraden mit einer Steigung von $-5/6$ gehören zu Schar der Zielfunktionen. Jede einzelne Gerade hieraus steht für eine feste Gesamtnotenpunktzahl, die durch alle Punkte, welche auf der Geraden liegen, erreicht wird. Beispielsweise führen alle Punkte, welche auf der mittleren Geraden liegen, zu einer Gesamtnotenpunktzahl von Z = 9. Eine Zielfunktion mit einem höheren y-Achsenabschnitt steht stets für eine höhere Gesamtnotenpunktzahl.

Sinnvoll bei Maximierungsproblemen :
Zielfunktion mit **hohem y - Achsenabschnitt**.

4. Grafische Bestimmung des Maximums

Eine Ursprungsgerade mit der Steigung $-5/6$ wird soweit parallel nach oben verschoben, bis sie **nur noch einen** gemeinsamen Punkt mit dem Planungsbereich aufweist.
Der Punkt **P(4| 6)** befindet sich auf dieser Zielfunktion mit dem höchsten y-Achsenabschnitt.
Es ist also optimal für Klara, sich 4 Stunden auf Englisch und 6 Stunden auf Mathe vorzubereiten. Sie erreicht hierdurch eine Gesamtnotenpunktzahl von $Z = 14$, wobei sie 5 ($= 1,25 \cdot 4$) Notenpunkte in Englisch und 9 ($= 1,5 \cdot 6$) in Mathe erhält.



Lösung von Maximierungsproblemen
Der **Punkt aus dem Planungsbereich**, welcher auf der Zielfunktion mit dem **höchsten y - Achsenabschnitt** liegt.