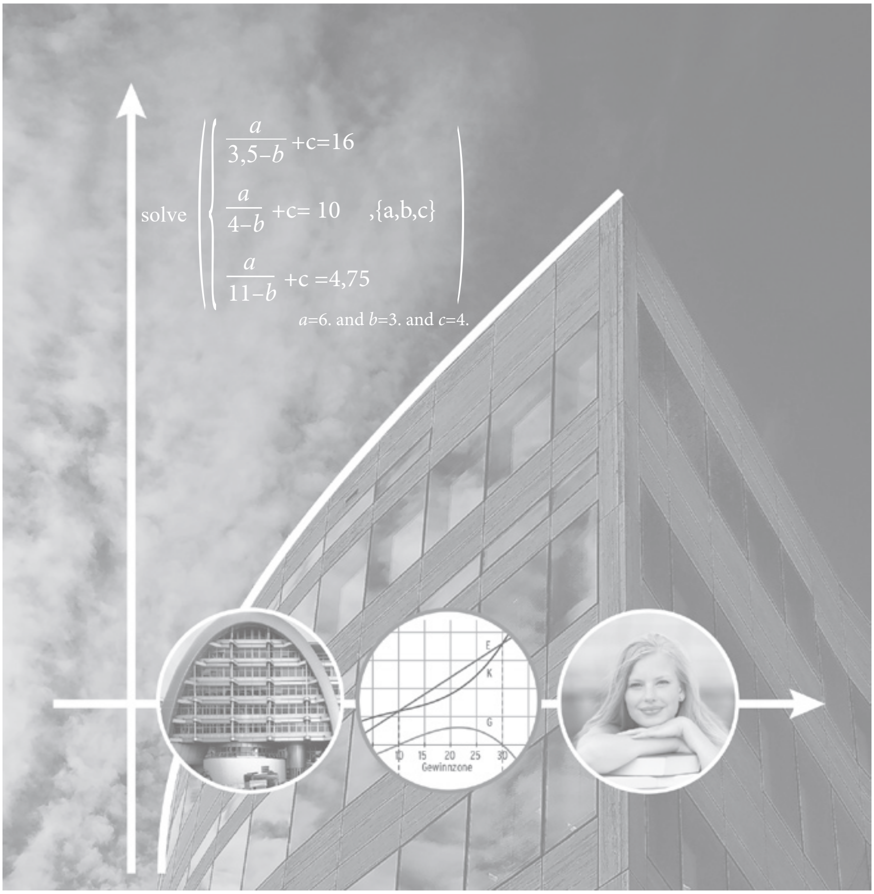
Ott

Abitur 2025 | eA – *CAS*

Nach den Vorgaben des Kerncurriculum 2018

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik an Beruflichen Gymnasien
– Wirtschaft, Gesundheit und Soziales

Niedersachsen



Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap

Der Verfasser:

Roland Ott
Oberstudienrat

Umschlag: Kreis rechts: www. adpic.de

* * * * *

Quellennachweis der Prüfungsaufgaben: Niedersächsisches Kultusministerium

19. Auflage 2024

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0223-19
ISBN 978-3-8120-1127-3

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung wurde der neuen Prüfungsordnung für Berufliche Gymnasien in Niedersachsen 2025 angepasst. Sie richten sich an Schülerinnen und Schüler zur Vorbereitung auf das Abitur an Beruflichen Gymnasien mit den Fachrichtungen Wirtschaft sowie Gesundheit und Soziales im Kurs mit erhöhtem Anforderungsniveau (eA). Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung 2025 in Niedersachsen sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik für das berufliche Gymnasium (KC, 2018).
Aufgrund von Vereinbarungen der Länder im Zusammenhang mit der Entwicklung der gemeinsamen Abituraufgabenpools werden in Niedersachsen ab der Abiturprüfung im Jahr 2025 einige inhaltsbezogenen Kompetenzen zusätzlich vorausgesetzt. Diese sind vollumfänglich berücksichtigt:

- Sinus im Prüfungsteil A
- Grundlegende Kenntnisse zu Umkehrfunktionen
- Analytische Geometrie

Operatoren, die für das Fach Mathematik besondere Bedeutung haben, werden in der Tabelle Seite 20 erläutert und konsequent in Abiturarbeiten verwendet.
Im ersten Teil des Buches werden nur **neue Aufgabentypen** ohne Hilfsmittel aus den Prüfungsgebieten Analysis und Analytische Geometrie vorgestellt.
Im zweiten Teil werden die **an den Prüfungsmodus 2025** angepassten Abituraufgaben der letzten Jahre seit 2018 vorgestellt und ausführlich gelöst.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Da die Aufgabensammlung allen Schülerinnen und Schüler bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhalt

Zentralabitur

Berufliches Gymnasium Wirtschaft, Gesundheit und Soziales

Erhöhtes Anforderungsniveau (eA), CAS

Hinweise für den Prüfling für das Abitur 2025

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik besteht aus zwei Teilen: **Prüfungsteil A** **Prüfungsteil B**

Für das erhöhte Anforderungsniveau (eA) beträgt die gesamte Prüfungszeit 330 Minuten. Zu Prüfungsbeginn stehen den Prüflingen sowohl die Aufgaben des Prüfungsteils A als auch die Aufgaben des Prüfungsteils B zur Bearbeitung zur Verfügung. Die Prüflinge entscheiden selbst über den Zeitpunkt, zu dem sie die Bearbeitung des Prüfungsteils A abgeben und die Hilfsmittel erhalten.
Dieser Zeitpunkt muss auf erhöhtem Anforderungsniveau innerhalb der ersten 100 Minuten nach Prüfungsbeginn liegen.

Prüfungsteil A:

Bearbeitung ohne digitale Mathematikwerkzeuge, ohne Formelsammlung.
Als Hilfsmittel sind nur die üblichen Zeichenmittel zugelassen.

- Maximale Bearbeitungszeit: die ersten 100 Minuten.
- **4 Pflichtaufgaben** (2 aus Analysis und je 1 aus den anderen Sachgebieten)
  \+ **2 Wahlaufgaben** (je 2 aus jedem Sachgebiet zur Auswahl)
  = **6 Bearbeitungsaufgaben im Prüfungsteil A**
- Bei jeder dieser 6 Aufgaben können fünf Bewertungseinheiten (BE) erreicht werden. 30 BE von insgesamt 120 BE.

Prüfungsteil B:

Nach Abgabe der Unterlagen des Prüfungsteils A werden die Hilfsmittel an den Prüfling ausgegeben.

- Verbleibende Zeit der gesamten Prüfungszeit von 330 Minuten
- Die Prüflinge wählen aus jedem der 3 Sachgebiete jeweils eine von zwei Aufgaben aus.

Analysis 40 BE	Stochastik 25 BE	Lineare Algebra/Analytische Geometrie 25 BE
1A; 1B	2A; 2B	3A; 3B

- Erlaubte Hilfsmittel: Zeichenmittel; eingeführter CAS-Rechner (mit Handbuch); eingeführte Formelsammlung.

1 Prüfungsteil A: Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Aufgaben zum Prüfungsteil A

Analysis

Lösungen ab Seite 12

Neue Aufgaben relevant für das Abitur 2025

Aufgabe 1

a) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion g mit $g(x) = 3x^2 - x + \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$.

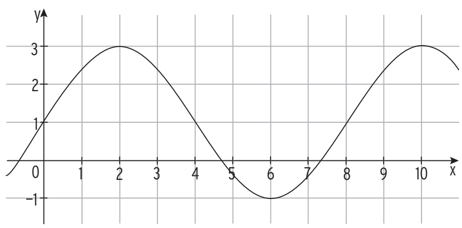
b) Berechnen Sie den Wert des Integrals als $\int_{-1}^{1} (\sqrt{2} \cdot x)^2 \, dx$.

c) Im Folgenden ist e die Eulersche Zahl und h die Funktion mit $e^{h(x)} = x$ für $x > 0$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel: $h'(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

Aufgabe 2

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubildes einer Funktion f.



Begründen Sie anhand der Abbildung, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) $f'(1) > 0$

(2) $\int_{1}^{3} f(x)\, dx \geq 6$

(3) Für jede Stammfunktion F von f gilt: $F(4) = F(0)$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f. Geben Sie D und W von f^{-1} an.

a) $f(x) = 3x - 2;\ x \geq 1$

b) $f(x) = x^2 + 4x;\ x \geq -2$

c) $f(x) = 4e^{-3x} - 1;\ x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 5\ln(x - 3);\ x \in D_f$.

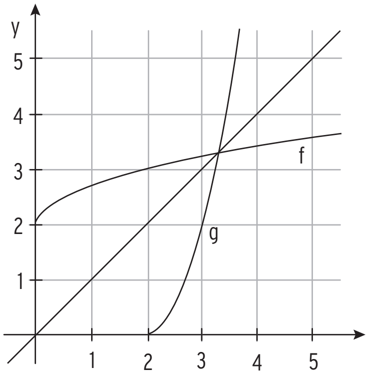
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f.

Wie entsteht der Graf von f aus dem Grafen von g mit $g(x) = \ln(x)$?

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f mit maximalen Defintions- und Wertebereich.

Aufgabe 5

Ermitteln Sie die Funktionsterme der dargestellten Funktionen f und g.

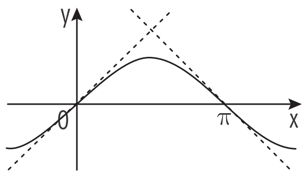


Aufgabe 6

Eine in ℝ definierte Kosinusfunktion f hat die Periode p. Der Punkt $(\frac{p}{2} \mid p)$ ist ein Hochpunkt des Graphen von f, der Punkt $(\frac{p}{4} \mid \frac{p}{2})$ ein Wendepunkt. Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f an der Stelle $\frac{p}{4}$.

Aufgabe 7

Gegeben ist die in ℝ definierte Funktion $f\colon x \to \sin x$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f sowie die Tangenten an G_f in den dargestellten Schnittpunkten mit der x-Achse.



a) Zeigen Sie, dass diejenige der beiden Tangenten, die durch den Koordinatenursprung verläuft, die Steigung 1 hat.

b) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f und den beiden Tangenten eingeschlossen wird.

Aufgabe 8

Gegeben sind die in ℝ definierten Funktionen $f\colon x \to \sin x$ und $g\colon x \to x$. Die Graphen von f und g haben in ihrem einzigen gemeinsamen Punkt $O(0 \mid 0)$ die gleiche Steigung.

a) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, der Graph von g und die Gerade mit der Gleichung $x = \pi$ einschließen.

b) Geben Sie eine Gleichung einer Tangente an den Graphen von f an, die die beiden folgenden Eigenschaften hat:
   - Die Tangente verläuft parallel zum Graphen von g.
   - Die Tangente enthält nicht den Punkt O.

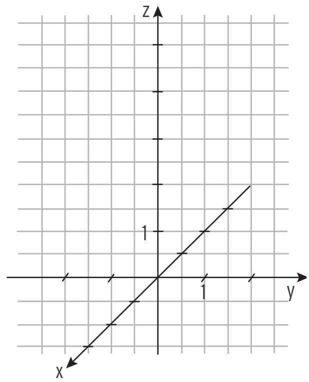
Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Lösungen ab Seite 14

Neue Aufgaben relevant für das Abitur 2025

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte $A(2\,|-2\,|\,1)$, $B(-2|\;2|\;1)$ und $C(-2|-2|\;5)$.



a) Zeichnen Sie die Punkte A, B und C in das nebenstehende Koordinatensystem ein.

b) Die Verbindungsvektoren der drei Punkte sind die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CA}$.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ein gleichseitiges Dreieck ist.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte $A(-1|\,1|4)$, $B(-3|5|6)$ und $C_t(-2+t|3|\,t+5)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass jedes Dreieck ABC_t gleichschenklig ist.

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die das jeweils zugehörige Dreieck ABC_t gleichseitig ist.

Aufgabe 3

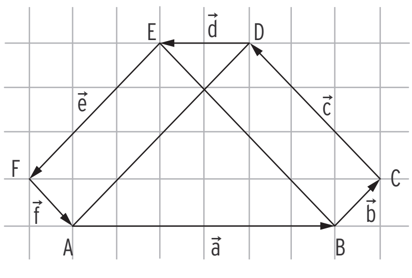
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b_c} = \begin{pmatrix} 4 \\ c \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie c so, dass gilt: $\left|\overrightarrow{b_c}\right| = \sqrt{21}$.

b) Prüfen Sie, ob in diesem Fall die Vektoren $\vec{a}$ und $\overrightarrow{b_c}$ kollinear sind.

Aufgabe 4

Im dargestellten Sechseck ABCDEF sind jeweils zwei Seiten parallel.



a) Stellen Sie die Vektoren $\vec{x} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ und $\vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$ jeweils mithilfe der Eckpunkte des Sechsecks dar.

b) Geben Sie für den Vektor $\vec{x}$ mit $\vec{x} = \vec{f} - \vec{e} - \vec{c}$ einen Repräsentanten an.

c) Der Punkt A hat in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -4$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ wird mit M bezeichnet. Der Punkt $K(2|0|8)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$.
Ermitteln Sie die Koordinaten von B.

Aufgabe 5

Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(-3|1|4)$, $C(2|-4|4)$ und $D(5|-5|0)$.

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

b) Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius eines Kreises mit dem Durchmesser $\overline{AC}$ an.

c) Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$.

Aufgabe 6

Geben Sie jeweils die Koordinaten der im Folgenden beschriebenen Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem an, die nicht im Koordinatenursprung liegen:

a) ein Punkt in der y-z-Ebene,

b) ein Punkt der z-Achse,

c) ein Punkt, der von der x-z-Ebene den Abstand 2 LE hat.

Hinweis: Geben Sie jeweils einen Punkt an.

Aufgabe 7

Gegeben ist eine Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S. In einem kartesischen Koordinatensystem haben deren Eckpunkte die Koordinaten $A(5|1|3)$, $B(9|4|3)$, $C(8|-3|3)$ und $S(1|5|-1)$.

a) Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABC ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck ist.

b) Geben Sie die spezielle Lage der Grundfläche ABC im Koordinatensystem sowie die Höhe h der Pyramide an.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Punkte $A(1|2|0)$, $B(1|6|0)$ und $C_t(t-2|t+7|0)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \neq 0$. Sie sind drei der vier Eckpunkte der viereckigen Grundfläche $DABC_t$ einer Pyramide.

Der Punkt S ist die Spitze der Pyramide. Die Höhe h beträgt 7 LE.

a) Bestimmen Sie denjenigen Wert von t, für den die Grundfläche ein Quadrat ist.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D der quadratischen Grundfläche.

Aufgabe 9

In einem kartesischen Koordinatensystem wird ein Quader ABCDEFGH beschrieben durch $A(5|3|-3)$, $B(9|7|-1)$, $C(10|5|1)$, $D(6|1|-1)$, $E(3|4|-1)$, $F(7|8|1)$ und $G(8|6|3)$. Die Kanten werden durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ beschrieben.

a) Stellen Sie den Quader in einem kartesischen Koordinatensystem dar und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes H.

b) Weisen Sie die Rechtwinkligkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nach.

c) M ist Mittelpunkt der Grundfläche ABCD. Geben Sie $\overrightarrow{AM}$ als Linearkombination aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an. Geben Sie die Koordinaten von M an.

d) Z ist Mittelpunkt des Quaders ABCDEFGH. Geben Sie $\overrightarrow{DZ}$ als Linearkombination aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ an. Bestimmen Sie die Koordinaten von Z.

2 **Zentralabitur** Mathematik eA an beruflichen Gymnasien

Operatorenliste

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
herleiten	Aus bekannten Sachverhalten oder Aussagen muss nach gültigen Schlussregeln mit Berechnungen oder logischen Begründungen die Entstehung eines neuen Sachverhaltes dargelegt werden. In einer mehrstufigen Argumentationskette können Zwischenschritte mit digitalen Mathematikwerkzeugen durchgeführt werden – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen. Für die Berechnung der Extrempunkte einer Funktion f ist es beispielsweise nicht zulässig, diese direkt aus dem Graphen von f abzulesen.
bestimmen, ermitteln	Ein möglicher Lösungsweg muss dargestellt und das Ergebnis formuliert werden. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
klassifizieren	Eine Menge von Objekten muss nach vorgegebenen oder selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen eingeteilt werden. Eine Begründung der vorgegebenen bzw. selbstgewählten Kriterien wird ggf. gesondert gefordert.

Operator	Erläuterung
vergleichen	Sachverhalte, Objekte oder Verfahren müssen gegenübergestellt und Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede müssen festgestellt werden. Ggf. müssen Vergleichskriterien festgelegt werden. Eine Bewertung wird ggf. gesondert gefordert.
untersuchen	Eigenschaften von oder Beziehungen zwischen Objekten müssen herausgefunden und dargelegt werden. Je nach Sachverhalt kann zum Beispiel ein Strukturieren, Ordnen oder Klassifizieren notwendig sein. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

Angepasster Prüfungsteil A
zur Vorbereitung auf das Abitur 2025

Prüfungsteil A:
- Bearbeitung ohne elektronische Hilfsmittel, ohne Formelsammlung.
  Als Hilfsmittel sind nur die üblichen Zeichenmittel zugelassen.
- Maximale Bearbeitungszeit: die ersten 100 Minuten.
- **4 Pflichtaufgaben** (2 aus Analysis und je 1 aus den anderen Sachgebieten)
  \+ **2 Wahlaufgaben** (je 2 aus jedem Sachgebiet zur Auswahl)
  = **6 Bearbeitungsaufgaben im Prüfungsteil A**
- 25 % der erreichbaren Bewertungseinheiten (BE), 30 BE von insgesamt 120 BE.

Um diesen neuen Anforderungen gerecht zu werden, wurde der Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel) für alle folgenden Abiturjahrgänge 2018 bis 2024 so gestaltet, wie er in der **Abiturprüfung 2025** dem Prüfling vorliegt:
- **4 Pflichtaufgaben** (2 aus Analysis und je 1 aus den anderen Sachgebieten)
- **6 Wahlaufgaben** (je 2 aus jedem Sachgebiet zur Auswahl)

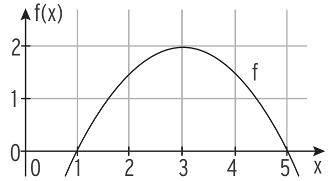
Die Autoren wünschen viel Erfolg.

Zentralabitur 2018 **Mathematik** **Berufliches Gymnasium**

Prüfungsteil A – In Anlehnung an die Prüfungsbedingungen 2025 – Pflichtaufgaben

Aufgabe P1

Die Abbildung zeigt den Graphen einer quadratischen Funktion f.



a) Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an. (1 BE)

b) Gegeben sind die beiden Terme

(I) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$ und (II) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(4) - f(x)}{4 - x}$; $x \neq 4$

Beschreiben Sie ihre jeweilige Bedeutung in Bezug auf den Graphen von f (2 BE)

c) Veranschaulichen Sie den Wert des Terms $4 \cdot 2 - \int_1^5 f(x)dx$. (2 BE)

Aufgabe P2

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$.

a) Gegeben ist die Gleichung $\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{2}{a}$.

Bestimmen Sie eine Lösung für x. (2 BE)

b) Bestimmen Sie alle Werte für a so, dass der vertikale Abstand der Graphen von f_a und $f_a{}'$ an der Stelle $x = 0$ mindestens 3 beträgt. (3 BE)

Aufgabe P3

a) Betrachtet werden die Matrizen A, B, C und D.

A hat 3 Zeilen und 7 Spalten, d.h. das Format von A ist 3×7.

B hat das Format 7×2 und $D = A \cdot B \cdot C$ hat das Format 3×4.

Geben Sie das Format der Matrix C an. (2 BE)

b) Gegeben sind die Matrizen

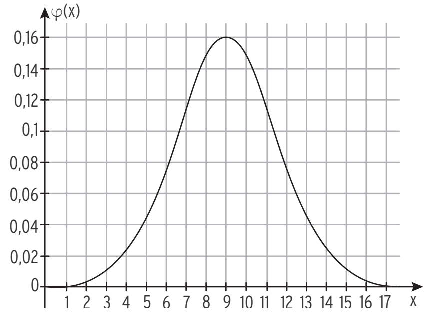
$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a\,(a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $Z = \begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

Es gilt: $Z = X \cdot Y$.

Bestimmen Sie alle möglichen Werte für a, b und c. Geben Sie die Anzahl der Lösungen der Form (a; b; c) an. (3 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Aufgabe P4



Gegeben ist die Dichtefunktion φ einer normalverteilten Zufallsgröße X mit einer Standardabweichung $\sigma_X = 2{,}5$
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird durch $P(6{,}5 \leq X \leq 11{,}5)$ beschrieben.

a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A in der Abbildung grafisch dar.
Geben Sie den Erwartungswert μ_X an. (2 BE)

b) Eine Zufallsgröße Y ist normalverteilt mit $\mu_Y = 7$ und $\sigma_Y = 1{,}25$. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses B wird durch $P(4{,}5 \leq Y \leq 9{,}5)$ beschrieben.
Untersuchen Sie, welches der beiden Ereignisse A oder B eine größere Wahrscheinlichkeit aufweist. (3 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil A Wahlaufgaben

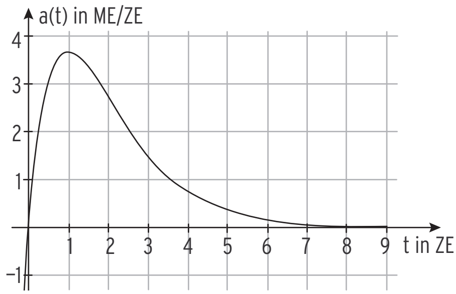
Bearbeiten Sie zwei der sechs Wahlaufgaben W1 bis W6.

Aufgabe W1

Die PRINTFIX AG fertigt innovative und hochwertige 3D-Drucker. Der momentane Absatz in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit (ME/ZE) kann durch den Graphen a des Produktlebenszyklus $a(t) = 10t \cdot e^{-t}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden.

a) Skizzieren Sie den Graphen der momentanen Absatzveränderung in das nebenstehende Koordinatensystem. (2BE)

b) Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt, an dem die PRINTFIX AG die meisten 3D-Drucker pro ZE absetzt. (3 BE)

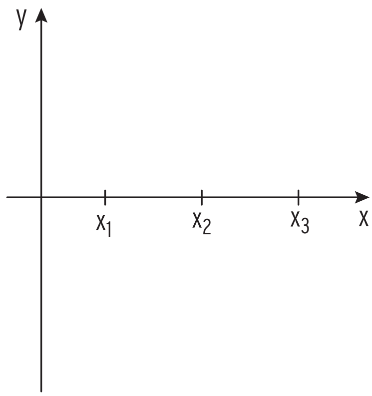


Aufgabe W2

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein Minimum an der Stelle x_3 .

Die Abbildung zeigt die Positionen von x_1, x_2 und x_3 .



a) Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist. (2 BE)

b) Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen von f. (3 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil Wahlaufgaben

Aufgabe W3

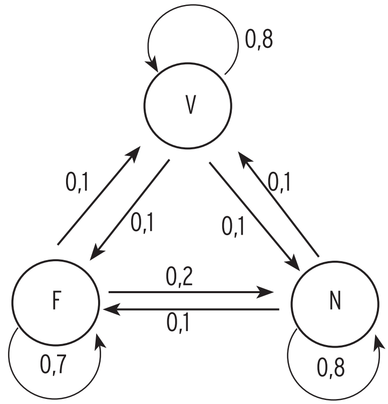
Betrachtet wird ein Dreieck ABC mit $A(0 \mid 0 \mid 0)$ und $B(3 \mid 5 \mid -4)$. Das Dreieck hat die folgenden Eigenschaften:

- Das Dreieck ist sowohl gleichschenklig als auch rechtwinklig.
- $\overline{AB}$ ist eine Kathete des Dreiecks.
- Die zweite Kathete des Dreiecks liegt in der x_1x_3 -Ebene.

Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punkts, der für C infrage kommt. (5 BE)

Aufgabe W4

Die Nutzer einer Kantine werden hinsichtlich der Auswahl eines Menüs in drei Gruppen eingeteilt: Esser des Nudelgerichts (N), Esser des Fleischgerichts (F) und Esser des vegetarischen Gerichts (V).
Der abgebildete Graph gibt modellhaft die Übergänge zwischen den Gruppen von Tag zu Tag an. Es soll davon ausgegangen werden, dass die Gesamtanzahl der Nutzer der Kantine konstant bleibt.



a) Geben Sie die in der zugehörigen Übergangsmatrix M fehlenden Werte an:

$$M = \begin{pmatrix} \square & 0{,}2 & \square \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ \square & 0{,}1 & \square \end{pmatrix}$$ (2 BE)

b) Geben Sie den Wert a_{21} der Matrix $M^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ an.

Interpretieren Sie diesen Wert. (3 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil A Wahlaufgaben

Aufgabe W5

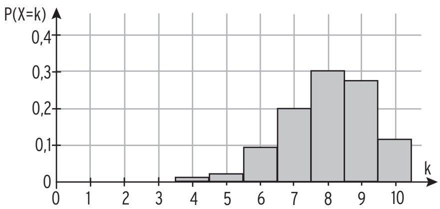
Die vier Seiten eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 durchnummeriert. Das Tetraeder wird fünfmal geworfen.

a) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ berechnet werden kann, und begründen Sie Ihre Angabe. (2 BE)

b) Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass jede Zahl mindestens einmal erzielt wird. (3 BE)

Aufgabe W6

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe. Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben. Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,8 angenommen.
In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.



a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-mal trifft. (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$ ist. (3 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil B CAS - Analysis

Aufgabe 1A

Das Unternehmen OPTI-Protect fertigt und vertreibt Protektoren, die bei der Schutzbekleidung im Motorsport verwendet werden. Als Mitarbeiter der Finanzabteilung sind Sie dafür zuständig, für den Vorstand die zu erwartende Kosten-, Erlös- und Gewinnsituation verschiedener Produkte zu untersuchen. Dabei wird die jeweilige Produktionsmenge x in Mengeneinheiten (ME) angegeben.

a) Mitarbeiter der Forschungs- und Entwicklungsabteilung des Unternehmens haben ein neues Produkt entworfen. Durch den Einsatz einer kombinierten Gel-Kunststoffplatte sollen sich die Protektoren individuell an den Rücken und die Wirbelsäule des Fahrers anpassen und dadurch optimalen Schutz bieten.
Für dieses Produkt ist der Hersteller Monopolist. Aus Marktforschungsergebnissen ist bekannt, dass sich der Preis p in Geldeinheiten je Mengeneinheit (GE/ME) für die Protektoren entsprechend der Gleichung $p(x) = -70x + 7000$ am Markt bestimmen lässt.
Es wird davon ausgegangen, dass die Gesamtkostenfunktion ertragsgesetzlich verläuft.
Es ist bekannt, dass Fixkosten in Höhe von 40 000 GE anfallen.
Der Grenzgewinn für dieses Produkt beträgt 1 300 GE/ME bei Produktion und Verkauf von 40 ME. Bei 10 ME ist mit einem Gewinn von 3 500 GE zu rechnen. Die Gewinngrenze wird bei einer produzierten Menge von 80 ME erreicht.
Bestimmen Sie die Funktionsterme der Erlös-, Gewinn- und Kostenfunktion.
Zur Kontrolle: $K(x) = 0{,}5x^3 - 60x^2 + 2\,500\,x + 40\,000$
Zeichnen Sie die ökonomisch relevanten Abschnitte der Graphen der Funktionen K, E, G und p in ein geeignetes Koordinatensystem und kennzeichnen Sie unter Angabe der entsprechenden Werte:
- Höchstpreis
- Sättigungsmenge
- Erlösmaximum
- Gewinnschwelle
- gewinnmaximale Menge

Berechnen Sie den Cournot‘schen Punkt und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Kontext der Aufgabe. (20 BE)

b) Nachdem das Produkt erfolgreich eingeführt wurde, drängt ein Wettbewerber mit Dumpingpreisen auf den Markt und bietet die Protektoren zum Preis von 1 000 GE/ME an. Damit ist OPTI-Protect für dieses Produkt kein Monopolist mehr.
Untersuchen Sie, ob OPTI-Protect bei unveränderter Gesamtkostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 60x^2 + 2\,500\,x + 40\,000$ diesen Preis langfristig halten kann.

Fortsetzung Aufgabe 1A b)

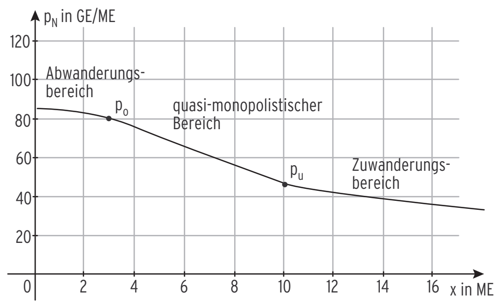
Zentralabitur 2018 Mathematik EA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil B CAS - Analysis

Fortsetzung Aufgabe 1A b)

b) Die Geschäftsführung möchte auf die veränderte Marktsituation reagieren und entsprechende Anpassungen bezüglich der Kostenstruktur vornehmen, um den Konkurrenten kurzfristig mit einem Preis in Höhe von 800 GE/ME vom Markt zu verdrängen. Das Fertigungsverfahren kann auf verschiedene Weisen optimiert werden, es entstehen abhängig von der Art der Optimierung c Gesamtkosten, die durch die Funktionenschar K_c mit $K_c(x) = 0{,}5x^3 - 60x^2 + 600\,c\cdot x + 40\,000$ mit $c \in \mathbb{N}$ modelliert werden.
Ermitteln Sie den Wert von c, für den die Vorgabe der Geschäftsführung eingehalten wird. Bestimmen Sie den maximalen Anteil der Fixkosten K_f, der bei einem Preis von 800 GE/ME kurzfristig gedeckt wird. (15 BE)

c) OPTI-Protect vertreibt weiterhin auch die klassischen Protektoren. Da das Unternehmen durch Qualität und Image am Markt sehr etabliert ist, ergibt sich trotz Konkurrenz ein quasi-monopolistischer Spielraum für die Preispolitik, d. h. in einem gewisssen Preissegment verhalten sich die Nachfrager dem Produkt gegenüber loyal wie im Monopol. Erst wenn die obere Preisgrenze p_o überschritten wird, kommt es zur Abwanderung der Kunden. Wird die untere Preisgrenze p_u unterschritten, kommt es zur Zuwanderung.



Aus dem Controlling liegen für die klassischen Protektoren folgende Daten vor:

Abwanderungsbereich: $p_{N1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 85{,}5$ mit $D(p_{N1}) = [0; 3)$

Quasi-monopolistischer Bereich: $p_{N2}(x) = -5x + 96{,}5$ mit $D(p_{N2}) = [3; 10]$

Zuwanderungsbereich: $p_{N3}(x) = \frac{600}{x+5} + 6$ mit $D(p_{N3}) = (10; \infty)$

Den Vorstand interessiert die Reaktionsstärke auf eine Preisänderung im quasi-monopolitischen Bereich.
Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Nachfrage elastisch bzw. unelastisch reagiert.

Fortsetzung Aufgabe 1A c)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil B CAS - Analysis

Fortsetzung Aufgabe 1A c)

Ein Vorstandsmitglied behauptet, dass die Nachfragefunktion im Zuwanderungsbereich bei hinreichend großer Absatzmenge zur Grenzerlöskurve werde und somit dieselbe Situation wie beim vollständigen Wettbewerb entstehen würde.
Überprüfen Sie diese Behauptung.

Aufgrund der starken Nachfrage nach dem neuen Produkt kommt es zu Produktionsengpässen. Seitens der Geschäftsleitung wurde entschieden, dass die Fertigung der klassischen Protektoren zugunsten der neuen Protektoren zurück gefahren werden soll. Die Gesamtkostenfunktion K und die Erlösfunktion E für die klassischen Protektoren sind durch folgende Gleichungen angegeben:
$E(x) = -5x^2 + 96{,}5x$ und $K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 100$.

Das Produktionsmengenintervall der klassischen Protektoren wird anhand zweier Kriterien festgelegt:

- Die Produktionsmenge soll so festgelegt werden, dass der Gesamtkostenanstieg nur degressiv ist.
- Der Wert der Wirtschaftlichkeit W mit $W(x) = \frac{E(x)}{K(x)}$ darf nicht unter 1,1 sinken.

Bestimmen Sie die möglichen neuen Produktionsmengen für die klassischen Protektoren im quasi-monopolistischen Definitionsbereich $D(p_{N2}) = [3; 10]$. (11 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil B CAS - Analysis

Aufgabe 1B

Das Unternehmen TOPSPIEL bringt das neue Kinderspielzeug TOP-MEMO auf den Markt. Die zuvor durchgeführte Marktanalyse hat ergeben, dass insgesamt 500 000 Mengeneinheiten (ME) dieses Spiel verkauft werden könnten. Die Marketingabteilung hat der Geschäftsleitung empfohlen, die kumulierten Verkaufszahlen der ersten Zeit zu erfassen und auswerten zu lassen. Auf Basis dieser Analyse sollen geeignete Marketingmaßnahmen ergriffen werden. Die Zeit t wird in Zeiteinheiten (ZE) angegeben und die kumulierten Verkaufszahlen in ME.

a) In den ersten vier Zeiteinheiten haben sich folgende kumulierte Verkaufszahlen ergeben:

t in ZE	1	2	3	4
kumulierte Verkaufszahlen (ME)	59 000	103 100	142 800	178 560

Aus jahrelanger Erfahrung ist bekannt, dass sich die zukünftigen Verkaufszahlen bei neuen Spielen mit Hilfe des begrenzten Wachstums prognostizieren lassen.
Für das Spielzeug TOP-MEMO hat die Geschäftsleitung auf Grund der Lagerkapazitäten die Vorgabe gesetzt, dass die durchschnittliche Zunahmen der kumulierten Verkaufszahlen mindestens um jeweils 10 % je ZE sinken sollen.
Untersuchen Sie, ob in den ersten vier Zeiteinheiten tatsächlich ein begrenztes Wachstum zu verzeichnen war, bei dem die Vorgabe der Geschäftsleitung eingehalten wurde. Bestimmen Sie die voraussichtliche kumulierte Verkaufszahl in ME für die nächste ZE ($t = 5$). (8 BE)

b) Die kumulierten Verkaufszahlen der ersten Zeit $t \in [0; 4]$, die durch die Funktion f mit $f(t) = 500\,000 - 490\,000e^{-0{,}1054 \cdot t}$ modelliert werden, waren zu hoch; es kam zu Lieferengpässen. Die Werbemaßnahmen, die im Hörfunk und Fernsehen geschaltet wurden, werden deshalb abgesetzt. Damit erhofft sich die Geschäftsleitung, dass die kumulierten Verkaufszahlen langsamer ansteigen werden und so die Lieferengpässe beseitigt werden, ohne dass die Produktionskapazität ausgeweitet werden muss. In der Zeit nachdem Absetzen der Werbung $t \in (4; 7]$ wurden folgende kumulierte Verkaufszahlen erzielt:

t in ZE	5	6	7
kumulierte Verkaufszahlen (ME)	204 344	235 094	266 303

Die Modellierung für die Berechnung der zukünftigen Verkaufszahlen ($t > 7$) erfolgt nun durch die Funktion g mit $g(t) = \frac{500\,000}{1 + 5{,}5 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}}$.

Fortsetzung Aufgabe 1B b)

Lösungen Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Lösungen Prüfungsteil A

Pflichtaufgaben

Aufgabe P1

a) Linearfaktordarstellung (Nullstellenansatz): $f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Mit den Nullstellen (abgelesen): $x_1 = 1;\ x_2 = 5$

Punktprobe mit S(3 | 2): $2 = a \cdot (3 - 1) \cdot (3 - 5) \Rightarrow a = -0{,}5$

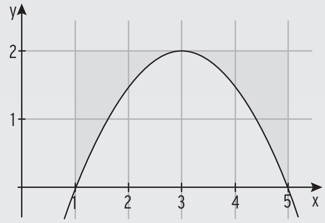
Mögliche Funktionsgleichung: $f(x) = -0{,}5(x - 1) \cdot (x - 5)$

Hinweis: Ansatz mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ und Einsetzen von 3 Punkten (1 | 0); (5| 0),(3| 2) führt über ein LGS auf $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$

Ansatz mit $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ und Einsetzen von Scheitelpunkt S(3| 2) und P(1 | 0) führt auf $f(x) = -0{,}5(x - 3)^2 + 2$

b) Der erste Term beschreibt die durchschnittliche Steigung des Graphen von f im Intervall [1; 3] (Sekantensteigung).

Der zweite Term beschreibt die Steigung des Graphen von f an der Stelle 4 (Tangentensteigung).



c) Einzeichnen eines möglichen Flächenstücks.

Aufgabe P2

a) Gleichung $\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{2}{a}$ auflösen nach x: $e^{a \cdot x} = 2$

Logarithmieren $a \cdot x = \ln(2) \Rightarrow x = \frac{\ln(2)}{a}$

b) Ableitung von f_a mit der Kettenregel: $f_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} \cdot a = e^{a \cdot x}$

Vertikaler Abstand in x = 0: $f_a(0) - f_a'(0) = \frac{1}{a} - 1 \qquad (e^{a \cdot 0} = 1)$

Ungleichung für a: $\frac{1}{a} - 1 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{a} \geq 4 \quad | \cdot a$

$4a \leq 1 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4} \qquad (0 < a < 1)$

Für $0 < a \leq \frac{1}{4}$ beträgt der gesuchte vertikale Abstand mindestens 3.

Aufgabe P3

a) Die Gleichung $D = A \cdot B \cdot C$ mit den entsprechenden Matrizenformaten:

$D_{(3;\,4)} = A_{(3;\,7)} \cdot B_{(7;\,2)} \cdot C_{(x;\,y)}$

x gibt hierbei die Zeilenanzahl, y die Spaltenanzahl der Matrix C an.

Da die Spaltenanzahl der Matrix B mit der Zeilenanzahl der Matrix C übereinstimmen muss, gilt x = 2. Die Spaltenanzahl der Matrix D muss der Spaltenanzahl der Matrix C entsprechen. Somit gilt y = 4.

Ingesamt hat C also das Format 2×4.

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Lösungen Prüfungsteil A

Pflichtaufgaben

Aufgabe P3 Fortsetzung .

b) $X \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a\,(a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a \cdot (a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

Wegen $Z = X \cdot Y$ muss dies Z entsprechen:

$\begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a \cdot (a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

Aus $4 = b^2$ erhält man $b_{1|2} = \pm 2$; aus $11 = 10 + c$ erhält man $c = 1$;

Mit $c = 1$ erhält man aus $12 = 9 + 2a \cdot (a-1) + 3 \cdot 1 \iff 0 = 2a \cdot (a-1)$

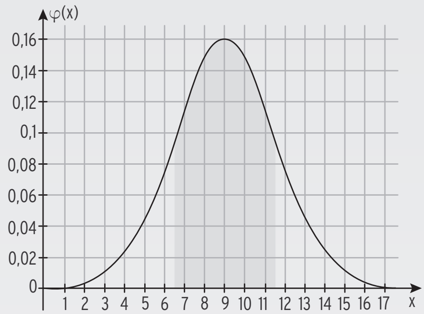
und dem Satz vom Nullprodukt: $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$.

Man erhält die Lösungen: (0; − 2 ; 1); (1; − 2 ; 1); (0; 2 ; 1) und (1; 2 ; 1) und somit also 4 Lösungen.

Aufgabe P4

a) Der Erwartungswert ist $\mu_X = 9$.

($\varphi(x)$ ist maximal in $x = 9$)



b) Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A entspricht der Wahrscheinlichkeit einer $1 \cdot \sigma_X$-Umgebung um $\mu_X = 9$.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B entspricht der Wahrscheinlichkeit einer $2 \cdot \sigma_Y$-Umgebung um $\mu_Y = 7$.

Somit gilt $P(A) < P(B)$.

Hinweis: $P(A) = P(6{,}5 \leq X \leq 11{,}5) = P(\mu_X - \sigma_X \leq X \leq \mu_X + \sigma_X) \approx 68\ \%$

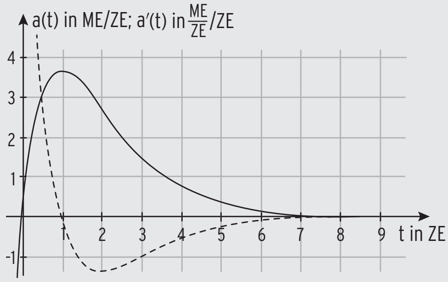
$P(B) = P(4{,}5 \leq Y \leq 9{,}5) = P(\mu_Y - 2 \cdot \sigma_Y \leq Y \leq \mu_Y + 2 \cdot \sigma_Y) \approx 95{,}5\ \%$

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Lösungen Prüfungsteil A

Wahlaufgaben

Aufgabe W1

a) Ableitungsgraphen skizzieren



b) Größter Absatz pro ZE

(größter momentaner Absatz):

$a'(t) = 10 \cdot e^{-t} + 10t \cdot e^{-t} \cdot (-1)$

$a'(t) = (10 - 10t) \cdot e^{-t}$

Bed.: $a'(t) = 0 \Leftrightarrow 10 - 10t = 0$

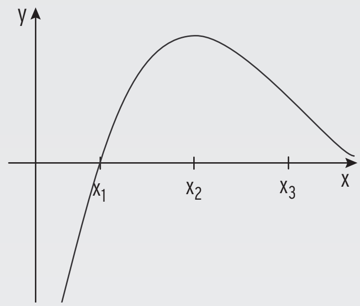
wegen $e^{-t} > 0$: $t = 1$

Zum Zeitpunkt 1 ZE wird der größte momentane Absatz erzielt.

Aufgabe W2

a) Da f' an der Stelle x_3 ein Minimum hat, ist der Grad von f' mindestens 2 und damit der Grad von f mindestens 3.

b) Skizze von f:



Aufgabe W3

Die Gerade durch A mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$ liegt in der x_1x_3 -Ebene und steht

wegen $\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\5\\-4\end{pmatrix} = 0$ senkrecht zur Gerade durch A und B.

C liegt auf dieser Geraden im Abstand $|\overline{AB}| = \sqrt{50}$ von O.

Bedingung: $\left| k \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} \right| = \sqrt{50} \quad \Leftrightarrow k \cdot 5 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \quad k = \sqrt{2}$

Damit kommt für C der Punkt $(4\sqrt{2} \mid 0 \mid 3\sqrt{2})$ infrage.

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Lösungen Prüfungsteil A

Aufgabe W4

a) Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

fehlende Werte: 0,7; 0,1; 0,1 ; 0,8 (Zeilensumme = 1)

b) Hinweis: Die 1. Zeile zeigt das Wechselverhalten der Fleischesser (F → V → N) ;

die 1. Spalte zeigt das Wechselverhalten der Nutzer zum Vegatarischen Gericht

(F → V; V → V; N → V)

Aus M · M ergibt sich: $a_{22} = (0{,}1 \quad 0{,}8 \quad 0{,}1) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}67$

Aufgabe W5

a) Ereignis: „Es wird keinmal die Zahl 1 erzielt."

Begründung: Bei jedem der fünf Würfe beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, nicht die Zahl 1 zu erzielen, $\frac{3}{4}$.

b) $\binom{5}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}$ z.B.: 1.Wurf: egal; 2.Wurf: 1 mit $p = \frac{1}{4}$;

3.Wurf: 2 oder 3 oder 4 mit $p = \frac{3}{4}$;

4.Wurf: 2 oder 3 (wenn im 3.Wurf 4fällt) mit $p = \frac{2}{4}$;

5.Wurf: 2 (wenn im 4.Wurf 3 fällt) mit $p = \frac{1}{4}$

Hinweis: Tetraeder: Vierflach mit 4 Seitenflächen#

Aufgabe W6

X ist binomialverteilt mit n = 10; p = 0,8

a) $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

Ablesen ergibt den Näherungswert: $0{,}30 + 0{,}27 + 0{,}11 = 0{,}68$

b) $P(X = 0) = 0{,}2^{10}$

Abschätzung: $0{,}2^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{10^{10}} = \frac{1024}{10\,000\,000\,000} = \frac{1{,}024}{10\,000\,000}$

$$0{,}2^{10} = \frac{0{,}1024}{1\,000\,000} < \frac{1}{1\,000\,000}$$

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Prüfungsteil B CAS
Lösungen Aufgabe 1A

a) Erlösfunktion E mit $E(x) = p(x) \cdot x = (-70x + 7000) \cdot x = -70x^2 + 7000x$

Gewinnfunktion: $G(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (da die Gesamtkosten ertragsgesetzlich sind)

Grenzgewinn $G'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Fixkosten: 40000 GE: $G(0) = -40000$ $\quad d = -40000$ (1)

$G'(40) = 1300$ $\quad 3a \cdot 40^2 + 2b \cdot 40 + c = 1300$ (2)

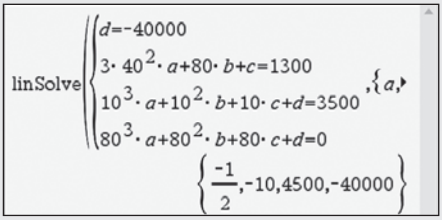
Gewinn $G(10) = 3500$ $\quad a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d = 3500$ (3)

Gewinngrenze: $G(80) = 0$ $\quad a \cdot 80^3 + b \cdot 80^2 + c \cdot 80 + d = 0$ (4)

Das LGS aus den Gleichungen (1) bis (4)

hat die Lösung:

$a = -0{,}5$; $b = -10$; $c = 4500$; $d = -40000$



Gewinnfunktion G mit $\quad G(x) = -0{,}5x^3 - 10x^2 + 4500x - 40000$

Gesamtkostenfunktion K mit $\quad K(x) = E(x) - G(x)$

$K(x) = 0{,}5x^3 - 60x^2 + 2500x + 40000$

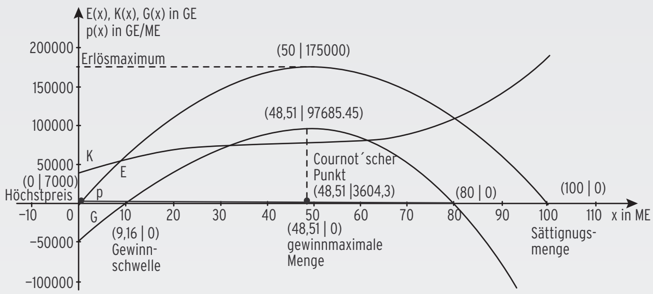
Höchstpreis in GE/ME:

$p(0) = 7000$

Sättigungsmenge in ME:

$p(x) = 0$ für $x = 100$

$D_{ök} = [0; 100]$



maximum in GE:

$E'(x) = 0$ und $E''(x) < 0$ für $x = 50$

$E(50) = E_{max} = 175000$

Gewinnschwelle in ME: $G(x) = 0$ für $x = 9{,}16$

Gewinnmaximale Menge in ME: $G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$ für $x = 48{,}51$

Cournot'scher Punkt C (C liegt auf dem Graphen der Preis-Absatzfunktion p)

$p(48{,}51) = 3604{,}30$

Cournot'scher Punkt $C(48{,}51 \mid 3604{,}30)$

Der Cournot'sche Punkt gibt den gewinnmaximalen Preis in Höhe von 3604,30 GE/ME an, dieser führt bei Fertigung und Verkauf von 48,51 ME zum maximalen Gewinn.

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Prüfungsteil B CAS
Lösungen Aufgabe 1A

b) **Untersuchung, ob Konkurrenzpreis langfristig gehalten werden kann**

Gesamte Stückkosten: k mit $k(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}5x^2 - 60x + 2500 + \frac{40000}{x}$

Tiefpunkt auf dem Graphen von k: T(68,52 | 1320,07)

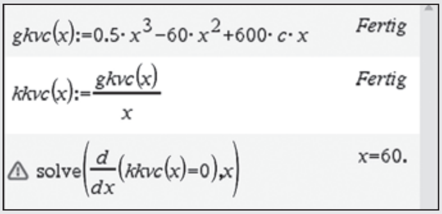
Langfristige Preisuntergrenze LPU (minimale Stückkosten): 1320,07 GE/ME

1320,07 GE/ME $>$ 1000 GE/ME

Die LPU liegt über dem Dumpingpreis des Konkurrenten. Langfristig kann der Preis des Konkurrenten nicht gehalten werden, da mit 1320,07 GE/ME gerade noch die minimalen Stückkosten gedeckt sind.

Technologie-Parameter c ermitteln

Kurzfristige Preisuntergrenze (KPU)



Variable Stückkosten $k_{v,c}$

mit $k_{v,c}(x) = \frac{K_{v,c}(x)}{x} = \frac{0{,}5x^3 - 60x^2 + 600cx}{x}$

$k_{v,c}(x) = 0{,}5x^2 - 60x + 600c$

$k'_{v,c}(x) = x - 60$; $k''_{v,c}(x) = 1 > 0$

Minimum der variablen Stückkosten: $k'_{v,c}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 60$

Mit $k''_{v,c}(x) > 0$ ergibt sich die Minimalstelle $x = 60$

Kurzfristige Preisuntergrenze: $k_{v,c}(60) = -1800 + 600c$

Wegen der Vorgabe der Geschäftsleitung: $-1800 + 600c \leq 800 \Rightarrow c \leq \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$

	c= 4	c= 3	c= 4	c= 1	c= 0
kPu	600	0	−600	−1 200	− 1 800

Für c = 4 liegt die kurzfristige Preisuntergrenze unter 800 GE/ME und die Vorgabe der Geschäftsleitung ist erfüllt. Die anderen Ergebnisse sind ökonomisch nicht sinnvoll.

Anteil der gedeckten Fixkosten bestimmen

Für c = 4: Minimum der variablen Stückkosten: 600 GE/ME ($k_{v,4}(60) = 600$)

Preis pro ME – $k_{v,4}(60) = 800 - 600 = 200$ bedeutet 200 GE Fixkostendeckung je ME.

Fixkostendeckung bei 60 ME: $200 \cdot 60 = 12\,000$ Anteil: $\frac{12000}{40000} = 0{,}3$

Bei einem Preis von 800 GE/ME werden 30 % der Fixkosten K_f gedeckt.

c) **Elastizitätsintervalle im quasi-monopolistischen Bereich bestimmen**

Elastizitätsfunktion: $e_{x,\,p_{N2}}(x) = \frac{p_{N2}(x)}{p'_{N2}(x) \cdot x} = \frac{-5x + 96{,}5}{-5x}$

Bedingung für fließende Nachfrage: $e_{x,\,p_{N2}}(x) = -1$ $\frac{-5x + 96{,}5}{-5x} = -1$

$x = 9{,}65$

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Prüfungsteil B CAS

Aufgabe 1A

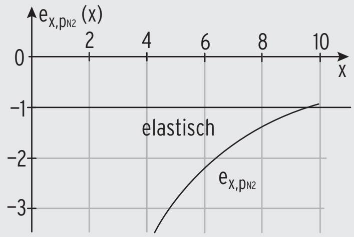
c) Elastizitätsintervalle

Elastische Nachfrage: $e_{x,\,p_{N2}}(x) < -1$

auf dem Mengenintervall (3; 9,65).

Wenn sich der Preis um 1 % ändert, ändert sich die Nachfragemenge um mehr als 1 % in entgegengesetzter Richtung.

Skizze von $e_{x,\,p_{N2}}(x)$



Unelastische Nachfrage:

Unelastische Nachfrage: $-1 < e_{x,\,p_{N2}}(x) < 0$ auf dem Mengenintervall (9,65 ; 10)

Wenn sich der Preis um 1 % ändert, ändert sich die Nachfragemenge um weniger als 1 % in entgegengesetzter Richtung.

Behauptung überprüfen

Große Nachfragemenge

$\lim\limits_{x\to\infty}(p_{N3}(x)) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{600}{x+5} + 6\right) = 6$ (Annäherung von oben)

$E(x) = p_{N3}(x) \cdot x = \left(\frac{600}{x+5} + 6\right) \cdot x = \frac{600x}{x+5} + 6x$

Grenzerlösfunktion: $E'(x) = \frac{3000}{(x+5)^2} + 6$

$\lim\limits_{x\to\infty}(E'(x)) = 6$ (Annäherung von oben)

Die Behauptung stimmt, da die Grenzwerte übereinstimmen.

Hinweis zur alternativen Argumentation: Beide Graphen (von E und p_{N3}) besitzen die waagrechte Asymoptote mit y = 6, sie bestehen jeweils aus einer echt gebrochen-rationalen Funktion, die für hinreichend große x gegen 0 konvergiert und einer Konstanten.

Neue Produktionsmengen im quasi-monopolistischen Definitionsbereich bestimmen

• Gesamtkostenanstieg nur degressiv

Der degressive Kostenzuwachs endet in der Wendestelle

Bedingung für die Wendestelle: $K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$

$K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 100;\ K'(x) = 3x^2 - 24x + 100;\ K''(x) = 6x - 24;\ K'''(x) = 6 \neq 0$

Wendestelle: $x = 4$

Poduktionsmengenintervall: [3; 4]

(ist in $D(p_{N2}) = [3; 10]$ enthalten)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Prüfungsteil B CAS

Aufgabe 1A

c) • Wirtschaftlichkeit nicht unter 1,1

$$W(x) = \frac{E(x)}{K(x)} = \frac{-5x^2 + 96{,}5x}{x^3 - 12x^2 + 60x + 100} \geq 1{,}1$$

Lösung von W(x) = 1,1:

$x_1 \approx -4{,}32$; $x_2 \approx 2{,}49$; $x_3 \approx 9{,}28$

Nur x_3 liegt in $D(p_{N2}) = [3; 10]$

$e(x):=-5\cdot x^2+96.5\cdot x$ *Fertig*

$k(x):=x^3-12\cdot x^2+60\cdot x+100$ *Fertig*

$w(x):=\frac{e(x)}{k(x)}$ *Fertig*

solve$(w(x)=1.1,x)$

$x=-4.32044$ or $x=2.49386$ or $x=9.28113$

Hinweis: $W(x) \geq 1{,}1$ für $2{,}49 \leq x \leq 9{,}28$

Die zulässigen neuen Produktionsmengen liegen im Intervall [3; 4], da nur in diesem Intervall beide Bedingungen erfüllt sind. (weil der Anstieg nicht progressiv sein darf.)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Prüfungsteil B CAS

Lösungen Aufgabe 1B

a) **Begrenztes Wachstum**

Beim begrenzten Wachstum liegt eine degressive Steigung vor, d.h. der Differenzenquotient muss von Intervall zu Intervall kleiner werden.

$$\frac{103\,100 - 59\,000}{2-1} = 44100; \quad \frac{142\,800 - 103\,100}{3-2} = 39700; \quad \frac{178\,560 - 142\,800}{4-3} = 35760$$

$$1 - \frac{39700}{44100} \approx 1 - 0{,}900227 = 0{,}099733 < 0{,}1$$

$$1 - \frac{35760}{39700} \approx 1 - 0{,}90075567 = 0{,}09924433 < 0{,}1$$

Die Vorgaben der Geschäftsleitung werden nicht eingehalten, ein begrenztes Wachstum liegt vor, aber der Rückgang ist etwas kleiner als 10 %.

Alternativ: Funktionsterm mit Regession bestimmen und über den Korrelationskoeffizienten und das Sättigungsmanko argumentieren.

$f(t) = 500\,000 - 490\,037{,}35 \cdot 0{,}899956^t$

Hinweis für die Regression: Daten minus 500000, danach Vorzeichenwechsel, f(t) = 500 000 – Ergebnis

Korrelationskoeffizient für das exponentielle Wachstum: r = – 0,9999...

Wachstumsfaktor 0,899956; 1 – 0,899956 = 0,100044

Die Zunahmen der Verkaufszahlen sinken um etwas mehr als 10 %.

Kumulierte Verkaufszahl für t = 5

$f(t) = 500000 - 490\,037{,}35 \cdot 0{,}899956^t$; $f(5) \approx 210\,709$

Nach 5 ZE müssten etwa 210 709 ME verkauft sein.

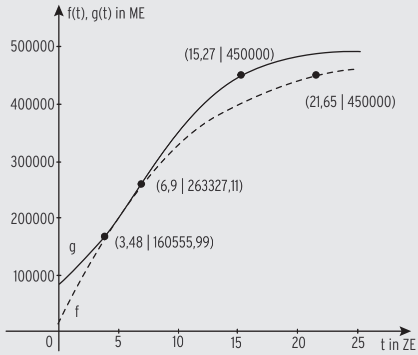
Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Prüfungsteil B CAS

Lösungen Aufgabe 1B

b) Skizze der Graphen von f und g

$g(t) = \frac{500\,000}{1 + 5{,}05 \cdot e^{-0{,}25t}}$; $t > 7$

$f(t) = 500000 - 490\,000 \cdot e^{-0{,}1054t}$



Schnittstellen

$g(t) = f(t)$ $t_1 \approx 3{,}48$; $t_2 \approx 6{,}9$

Im Intervall (3,48; 6,9) liegt der Graph von g unterhalb des Graphen von f.

Nur in diesem Intervall werden die Lieferengpässe geringfügig weniger.

Da die Betrachtung bei $t = 7 \notin (3{,}48; 6{,}9)$ erfolgt, werden die Lieferengpässe nicht reduziert.

Zeitpunkt mit 450 000 verkauften Spielzeugen

$f(t) = 450000$ ergibt $t \approx 21{,}65$

$g(t) = 450000$ ergibt $t \approx 15{,}27$

Bei der Modellierung durch das logistische Wachstum (g) werden 450 000 Spielzeuge 6,38 ZE früher verkauft, d. h. die Produktion muss schneller erfolgen, dies wird die Lieferengpässe erhöhen und nicht verringern.

Zeitpunkt und Höhe der größten Zunahme

Bei der Funktion g handelt es sich um logistisches Wachstum, d.h. die größte Steigung liegt im Wendepunkt vor.

Bedingung für die Wendestelle: $g''(t) = 0 \wedge g'''(t) \neq 0$ $t \approx 6{,}48$

und damit $g'(6{,}48) = 31\,250$

Hinweis: Um Ableitungen zu vermeiden, untersucht das CAS den Graphen von g' auf Extrempunkte.

Bei der Funktion f liegt begrenztes Wachstum vor, d.h. die größte Steigung liegt am linken Rand, also bei $t = 0$: $f'(0) = 51\,646$

Beide Zeitpunkte liegen vor der Betrachtung bei $t = 7$ und haben deshalb keine Auswirkungen auf zukünftige Lieferengpässe.

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Prüfungsteil B CAS

Lösungen Aufgabe 1B

c) **Zeit bis zur Fertigstellung des Nachfolgespiels**

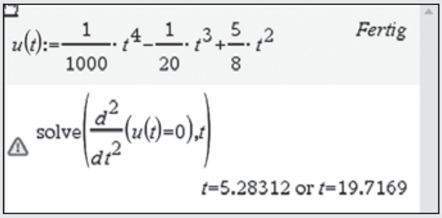
Produktlebenszyklus u mit $u(t) = \frac{1}{1000} \cdot t^4 - \frac{1}{20} \cdot t^3 + \frac{5}{8} \cdot t^2$; $t \geq 8$

Stärkster Umsatzrückgang im Wendepunkt

Bedingung für Wendestellen: $u''(t) = 0 \wedge u'''(t) \neq 0$

$u'(t) = \frac{1}{250} \cdot t^3 - \frac{3}{20} \cdot t^2 + \frac{5}{4} \cdot t$; $u''(t) = \frac{3}{250} \cdot t^2 - \frac{3}{10} \cdot t + \frac{5}{4}$; $u'''(t) = \frac{3}{125} \cdot t - \frac{3}{10}$

Wendestelle (auch direkt mit CAS): $t \approx 19{,}72$



$19{,}72 - 8 - 1 = 10{,}72$ (Produktionszeit 1 ZE)

Die Entwicklungsabteilung hat noch 10,72 ZE zur Verfügung.

Kapitalhöhe und Preis pro Spiel

$u(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1|2} = 0\,;\ t_{3|4} = 25$

Gesamtumsatz: $\int_0^{25} u(t)dt \approx 325{,}52$ (in 100 000 GE)

Der Gesamtumsatz beläuft sich auf 32 552 000 GE.

20 % für die Entwicklung: 32 552 000 · 0,2 = 6 510 400

Die Entwicklungsabteilung bekommt 6 510 400 GE.

Preis pro Spiel: $\frac{32\,552\,000}{500\,000} \approx 65{,}10$ (GE/Stück)

Ein Spiel TOP-MEMO kostet ca. 65,10 GE.

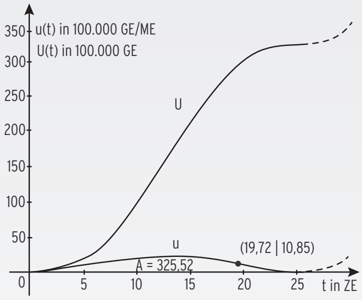
Zeitspanne, in der beide Spiele verkauft werden

Zeitspanne zwischen der Wendestelle und der zweiten Nullstelle: 25 – 19,72 = 5,28 (ZE)

5,28 ZE werden beide Spiele gleichzeitig verkauft.

Zeichnung mit Kennzeichnungen

Erläuterungen (Beispiel)



Der eingezeichnete Graph (U) stellt den Gesamtumsatz von TOP-MEMO grafisch dar, der ebenfalls durch die Fläche A unter dem Produktlebenszyklus angegeben wird. Beide Graphen verlaufen durch den Ursprung, weil das Produkt bei t = 0 auf den Markt kommt. Die Wendestelle von U wird zur Extremstelle von u.

Bei t = 25 wird das Produkt vom Markt genommen, dort liegt eine (doppelte) Nullstelle von u bzw. die Stelle des Sattelpunktes von U.

Zentralabitur 2024 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsbedingungen 2025:

Bearbeiten Sie die Aufgaben P1, P2, P3 und P4.

Wählen Sie von den Aufgaben Q1, Q2, Q3, Q4, Q5 und Q6 genau zwei zur Bearbeitung aus.

Prüfungsteil A Pflichtaufgaben

Aufgabe P1

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = ax^3 + ax^2$ mit $x \in \mathbb{R}_+$.

a) Geben Sie den Wert von a an, sodass der Punkt $(1 \mid 6)$ auf dem Graphen von f_a liegt. [1 BE]

b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}_+$ den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_a mit der Abszissenachse einschließt. [4 BE]

Aufgabe P2

Betrachtet wird die die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{ax} + 3$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Für jeden Wert von a besitzt die Funktion f_a genau eine Extremstelle.

a) Begründen Sie, dass der Graph von f_a für $x < 0$ unterhalb der Abszissenachse verläuft. [2 BE]

b) Beide Abbildungen (vgl. Abb. 1 und 2) zeigen einen Graphen der Schar, eine der beiden für einen positiven Wert von a.
Entscheiden Sie begründet, welche Abbildung dies ist. [3 BE]

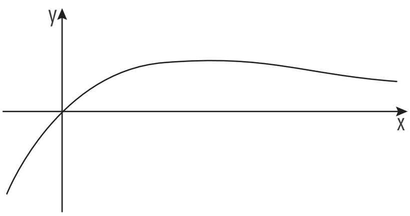


Abbildung 1

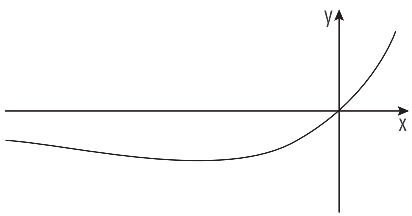


Abbildung 2

Zentralabitur 2024 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil A Pflichtaufgaben

Aufgabe P3

Ein Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren unterteilt, die entweder blau oder gelb eingefärbt sind. Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt, wie oft dabei die Farbe „Blau", die binomialverteilte Zufallsgröße Y, wie oft dabei die Farbe „Gelb" erzielt wird.

a) Begründen Sie, dass X und Y die gleiche Standardabweichung haben. [2 BE]

b) Der Erwartungswert von X ist ganzzahlig. Die Abbildung 3 zeigt einen Teil der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Sektoren des Glücksrades. [3 BE]

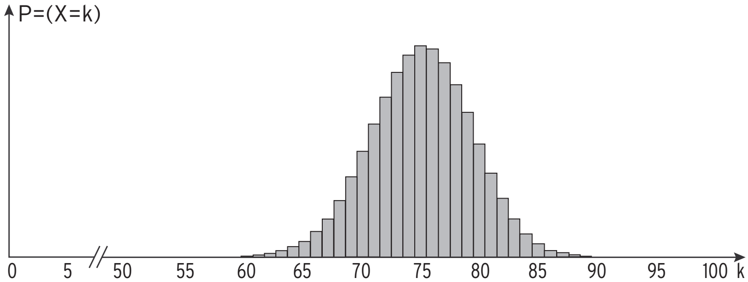


Abbildung 3

Aufgabe P4

Ein Unternehmen produziert aus zwei Rohstoffen drei Zwischenprodukte, aus denen dann zwei Endprodukte hergestellt werden.

Für den Produktionsprozess gilt $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}$.

Dabei gibt

der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ die Mengeneinheiten (ME) der beiden Rohstoffe an,

der Vektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ die ME der drei Zwischenprodukte und

der Vektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ die ME der beiden Endprodukte.

a) Bestimmen Sie die benötigten Mengeneinheiten der beiden Rohstoffe, die zur Herstellung von 2 ME des ersten und 2 ME des zweiten Endprodukts insgesamt benötigt werden. [1 BE]

b) Für 1 ME des ersten, 1 ME des zweiten und 1 ME des dritten Zwischenprodukts ist jeweils die gleiche Menge des ersten Rohstoffs erforderlich. Sowohl für 1 ME des ersten als auch für 1 ME des zweiten Zwischenprodukts werden 2 ME des zweiten Rohstoffs benötigt; auch das dritte Zwischenprodukt benötigt Rohstoff 2.
Bestimmen Sie die Matrix M, für die $\vec{r} = M \cdot \vec{z}$ gilt. [4 BE]

Zentralabitur 2024 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil A Wahlaufgaben

Aufgabenauswahl: Kreuzen Sie die beiden ausgewählten Aufgaben an.

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6

Aufgabe Q1

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$ (vgl. Abb. 4).
Eine Stammfunktion zu f wird mit F bezeichnet.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass f genau zwei Nullstellen besitzt. [2 BE]

b) Deuten Sie die Aussage
$F(2{,}5) - F(0) \approx 0$
in Bezug auf den Graphen von f geometrisch. [3 BE]

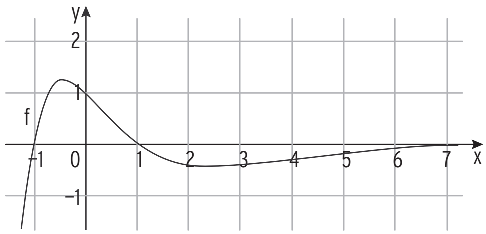


Abbildung 4

Aufgabe Q2

Für eine Zahl $a > 0$ zeigt die Abbildung 5 den Graphen f_a der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f_a mit $f_a(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x$ sowie die Gerade h. Die Graphen f_a und h schneiden sich im Koordinatenursprung und der Graph von h verläuft senkrecht zur Tangente an f_a im Koordinatenursprung. Zudem berühren sich der Graph der Funktion f_a und die Abszissenachse im Punkt $(a \mid 0)$.

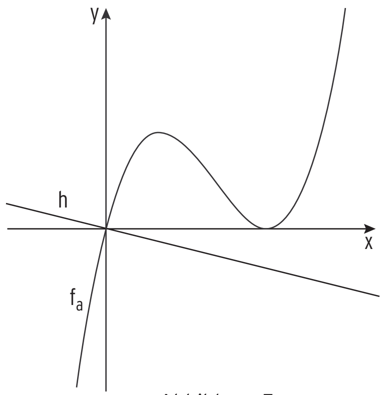


Abbildung 5

Betrachtet wird das Rechteck, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

• Die beiden gemeinsamen Punkte von f_a und der Abszissenachse sind zwei benachbarte Eckpunkte des Rechtecks.

• Eine Diagonale liegt auf der Geraden h.

Skizzieren Sie das Rechteck in der Abbildung 5.

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Rechtecks unabhängig von a ist. [5 BE]

Zentralabitur 2024 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil A Wahlaufgaben

Aufgabe Q3

Die drei nicht sichtbaren Seitenflächen des abgebildeten Würfels (vgl. Abb. 6) sollen jeweils mit einer der Zahlen 3, 4, 5 oder 6 beschriftet werden.
Dabei können Zahlen auch mehrfach verwendet werden.

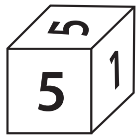


Abbildung 6

Nach der Beschriftung soll der Würfel folgende Eigenschaften haben:

- Beim einmaligen Werfen ist der Erwartungswert für die erzielte Zahl gleich 4.
- Auf den sechs Seitenflächen des Würfels kommen genau drei verschiedene Zahlen vor.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zweimaligen Werfen des Würfels zweimal die gleiche Zahl erzielt wird, beträgt 12.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, die nicht sichtbaren Seitenflächen des Würfels so zu beschriften, dass er alle drei Eigenschaften besitzt. [5 BE]

Aufgabe Q4

Betrachtet wird ein Tetraeder, bei dem die Seitenflächen mit den Zahlen 1 bis 4 durchnummeriert sind. Beim Werfen des Tetraeders werden alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzielt. Das Tetraeder wird viermal geworfen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Würfe, bei denen die Zahl 1 erzielt wird. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist in Abbildung 7 dargestellt.

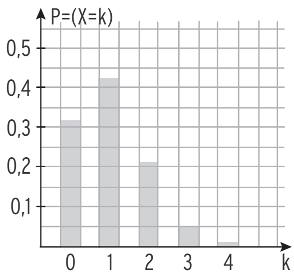


Abbildung 7

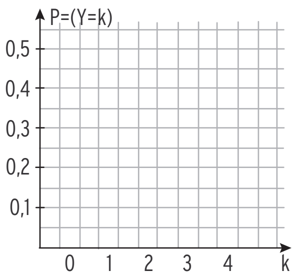


Abbildung 8

a) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen die Zahl 1 nicht erzielt wird. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in Abbildung 8 dar. [2 BE]

b) Bei einem anderen Zufallsexperiment werden ein roter und ein grüner Würfel, bei denen die Seitenflächen jeweils mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind, viermal gleichzeitig geworfen.
Geben Sie zu diesem Zufallsexperiment eine Zufallsgröße Z an, die die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung wie X hat, und begründen Sie Ihre Angabe. [3 BE]

Zentralabitur 2024 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil A Wahlaufgaben

Aufgabe Q5

Zwei Unternehmen sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten.

Es handelt sich dabei um Ströme von Gütern und Dienstleistungen in Geldeinheiten (GE).

Aus der aktuellen Produktion ergibt sich die Technologie-Matrix A mit ungekürzten Elementen: $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{20} & \frac{6}{30} \\ \frac{4}{20} & \frac{5}{30} \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Höhe der jeweiligen Marktabgabe. [3 BE]

b) Geben Sie die Voraussetzung dafür an, dass die beiden Unternehmen jede Marktnachfrage erfüllen können.
Stellen Sie den rechnerischen Ansatz für den zugehörigen Nachweis auf. [2 BE]

Aufgabe Q6

Die abgebildete gleichmäßige Kletterpyramide (vgl. Abb. 9) hat eine Höhe von h Meter (m). Auf halber Höhe der Seitenkanten sollen Streben zu den gegenüberliegenden Eckpunkten auf dem Boden führen.

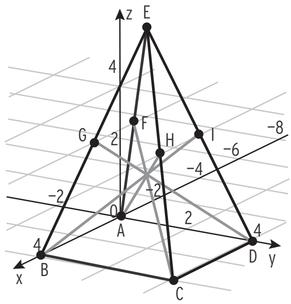


Abbildung 9

Ermitteln Sie einen Wert für h so, dass die Streben eine Länge von 5,5 m haben. [5 BE]

Zentralabitur 2024 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil B CAS - Analysis

Aufgabe 1A

Der Automobilhersteller *GT* möchte seine Elektroauto-Sparte weiter ausbauen und zukünftig Elektro-Limousinen herstellen. Damit die neue Elektro-Limousine den „umkämpften“ Limousinen-Markt „erobern“ kann, wurde ein energieeffizienteres Produktionsverfahren entwickelt, mit dem Kosten eingespart werden können.

Die neue Elektro-Limousine soll international angeboten werden.

Die Stückkosten in Geldeinheiten pro Mengeneinheit ($\frac{GE}{ME}$) werden mithilfe der Funktion k mit $k(x) = 2x^2 - 7x + 11 + \frac{6}{x}$ prognostiziert.

Die Produktion hat eine Kapazitätsgrenze von 4 ME.

a) Der US-amerikanische Markt für Elektro-Limousinen wurde im Rahmen der Markteintrittsstrategie beobachtet. Es kann von einem Marktpreis in Höhe von 10 $\frac{GE}{ME}$ ausgegangen werden. Die Geschäftsleitung von *GT* benötigt für die weitere strategische Planung eine Analyse der möglichen Gewinnsituation. Auf dieser Basis soll entschieden werden, ob die neue Elektro-Limousine auf dem US-amerikanischen Markt eingeführt werden soll.
Aufgrund des Return of Investment[1] muss der maximale Gewinn mindestens 4 GE betragen. Außerdem soll das Gewinnintervall mindestens 1,5 ME umfassen, damit eine erfolgreiche Markteinführung sichergestellt werden kann.
Untersuchen und beurteilen Sie die Gewinnsituation anhand dieser beiden Kriterien.
[14 BE]

b) Die Geschäftsleitung des Automobilherstellers *GT* möchte mit einer Niedrigpreisstrategie in den chinesischen Markt eintreten.
Berechnen Sie den Preis für die Elektro-Limousine, der für diese Strategie kurzfristig angenommen werden kann. [6 BE]

Fortsetzung Aufgabe 1A

1 Das Return of Investment, wörtlich übersetzt „Rückkehr der Investition“, gibt Aufschluss darüber, ab wann sich eine Investition rentiert bzw. bezahlt macht.

Zentralabitur 2024 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Prüfungsteil B CAS - Analysis

Aufgabe 1A Fortsetzung

c) Der Automobilhersteller *GT* hat sich mit der Elektro-Limousine erfolgreich auf dem chinesischen Markt etabliert. Die Geschäftsleitung möchte wissen, ob mit dem aktuellen Marktpreis in Höhe von 7 $\frac{GE}{ME}$ alle Kosten gedeckt werden. Die Mitarbeitenden der Controlling-Abteilung haben die Kostensituation der neuen Elektro-Limousine für die Geschäftsführung schon grafisch aufbereitet (vgl. Abb. 1) und festgestellt, dass nicht alle Kosten bei diesem Preis gedeckt werden.

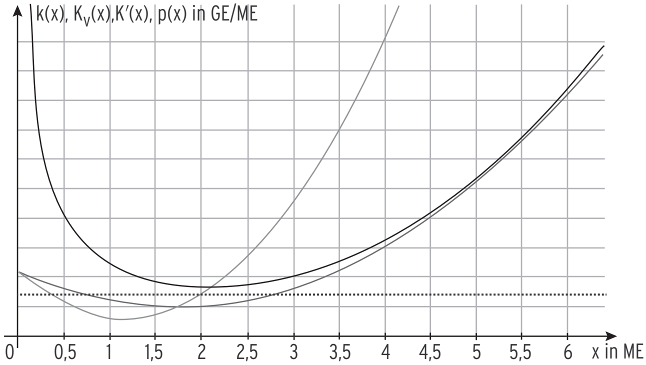


Abbildung 1: Kostensituation für den chinesischen Markt.

Beschreiben und interpretieren Sie die Kostensituation für die Geschäftsführung anhand der vier Graphen (vgl. Abb. 1).

Ergänzen Sie die Beschriftung der vier Graphen im **Materialanhang M1** (Abb. 2).

Die Geschäftsführung möchte eine Analyse darüber erhalten, um wie viel Prozent die Fixkosten gesenkt werden müssten, damit bei einem Preis von 7 $\frac{GE}{ME}$ alle Kosten gedeckt werden könnten.

Bestimmen Sie den Prozentsatz für die Senkung der Fixkosten. [20 BE]

Zentralabitur 2024 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Lösungen Prüfungsteil B

Aufgabe 1A

a) **Untersuchung und Beurteilung der Gewinnsituation**

Aufstellen der Erlösfunktion

$E(x) = p(x) \cdot x$ $\quad\quad$ $E(x) = 10x$

Aufstellen der Gesamtkostenfunktion

$K(x) = k(x) \cdot x$

$K(x)= (2x^2 - 7x + 11 + \frac{6}{x}) \cdot x$

$K(x)= 2x^3 - 7x^2 + 11x + 6$

Aufstellen der Gewinnfunktion

$G(x) = E(x) - K(x) = 10x - (2x^3 - 7x^2 + 11x + 6)$

$G(x) = -2x^3 + 7x^2 - 11x - 6$

Gewinnschwelle, Gewinngrenze bestimmen

$G(x) = 0$ im ökonomischen Definitionsbereich betrachtet $D_{ök}= [0;4]$

$x_{GS} \approx 1{,}28$; $x_{GG} = 3$

Länge des Gewinnintervalls überprüfen

$x_{GG} - x_{GS} = 3 - 1{,}28 = 1{,}72 > 1{,}5$

Das geforderte Gewinnintervall von mindestens 1,5 ME wird erzielt.

Gewinnmaximum

Maximalstelle $G'(x)=0 \wedge G''(x) < 0$

$x_{G,\,max} \approx 2{,}26$ und $G(2{,}26) \approx 4{,}41 > 4$

Die Zielvorgabe der Geschäftsleitung ist erfüllt, weil der maximale Gewinn über den geforderten 4 GE liegt.

b) **Berechnung der kurzfristigen Preisuntergrenze**

Aufstellen der variablen Stückkostenfunktion

$k_v(x) = k(x) - k_f(x)$

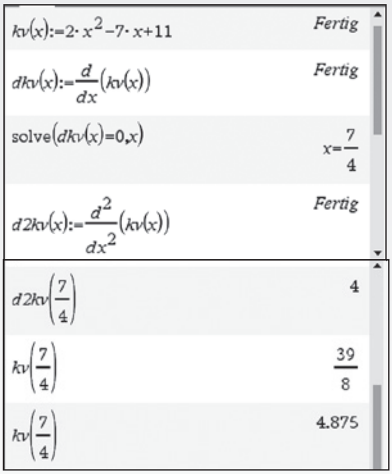
$k_v(x) = 2x^2 - 7x + 11$

Minimum der variablen Stückkosten

Tiefpunkt $k_v'(x)= 0 \wedge k_v''(x) > 0$

$x_{k_v,min} = 1{,}75$ und damit $k_v(1{,}75) \approx 4{,}88$

Für die neue Elektro-Limousine kann kurzfristig ein Preis von 4,88 GE/ME angenommen werden.



Zentralabitur 2024 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

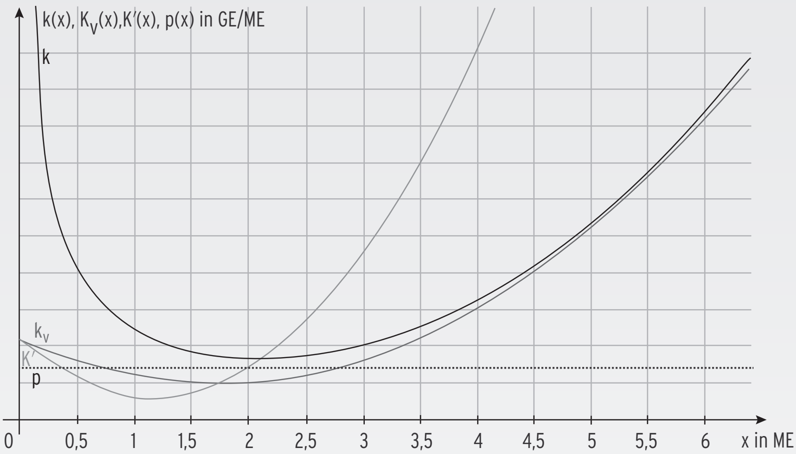
Lösungen Prüfungsteil B

Aufgabe 1A

c) **Beschreibung und Interpretation der grafischen Darstellung (Bsp.)**

- Die Grenzkostenfunktion K′ schneidet die Ordinatenachse und hat einen Schnittpunkt mit dem Graphen der variablen Stückkostenfunk-tion k_v und einen mit der Stückkostenfunktion k.
- Der Graph der Stückkostenfunktion befindet über dem Graphen der variablen Stückkostenfunktion. Die Schnittstelle des Graphen der Grenzkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion ist das Betriebsminimum.
- Die Schnittstelle der Graphen der Grenzkostenfunktion und der Stückkostenfunktion ist das Betriebsoptimum.
- Der Graph der Preisfunktion p ist eine konstante Funktion und wird durch die Parallele zur Abszissenachse dargestellt.
- Der Graph der Preisfunktion p verläuft zwischen der kurzfristigen und der langfristigen Preisuntergrenze.
- Die langfristige Preisuntergrenze liegt über dem chinesischen Marktpreis. Mit dem Verkauf der neuen Elektro-Limousine zum aktuellen Marktpreis können nicht alle Kosten gedeckt werden. Ein langfristiges Bestehen auf dem Markt würde zu Verlusten führen.

Beschriftung der Graphen ergänzen



Zentralabitur 2024 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Lösungen Prüfungsteil B

Aufgabe 1A Fortsetzung

c) **Prozentualen Senkung der Fixkosten bestimmen**

Bestimmung der neuen Stückkostenfunktion
$k(x) = 2x^2 - 7x + 11 + \frac{d}{x}$
Bestimmung der neuen Kostenfunktion
$K(x) = 2x^3 - 7x^2 + 11x + d$

Bestimmung der Höhe der neuen Fixkosten

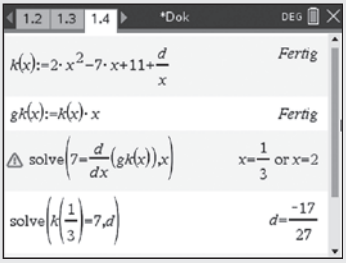
Schnittpunkt von k(x) und K′(x) bei (x | 7)

$K'(x) = 6x^2 - 14x + 11$

Bedingung: $7 = 6x^2 - 14x + 11$

$x_1 = \frac{1}{3} \vee x_2 = 2$

$k(\frac{1}{3}) = 2(\frac{1}{3})^2 - 7\cdot(\frac{1}{3}) + 11 + \frac{d}{\frac{1}{3}} = 7 \Rightarrow d = -\frac{17}{27}$



Negative Fixkosten sind ökonomisch nicht sinnvoll.

$k(2) = 2\cdot(2)^2 - 7\cdot(2) + 11 + \frac{d}{2} = 7 \Rightarrow d = 4$

Die Fixkosten betragen $K_{fneu} = 4$ GE.

Bestimmung der prozentualen Fixkostensenkung

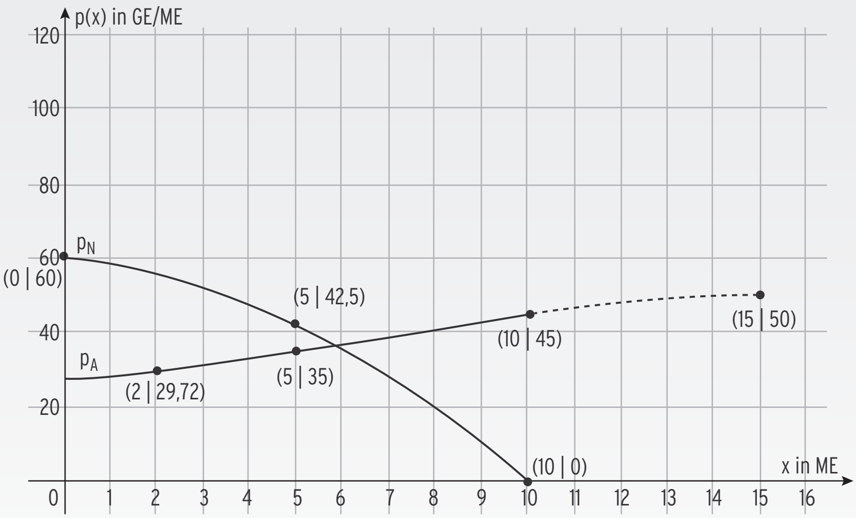
$p_{\%,Senkung} = 1 - \frac{K_{f,neu}}{K_{f,alt}} = 1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33 = 33\ \%$

Die Fixkosten müssen um ca. 33 % gesenkt werden, sodass ein Marktpreis von 7 $\frac{GE}{ME}$ langfristig gehalten werden kann.

Lösungen Prüfungsteil B Aufgabe 1B

a) **Grafik erstellen**

Ökonomischen Definitionsbereich bestimmen: $D_{ök} = [0; x_{Sättigung}] = [0; 10]$

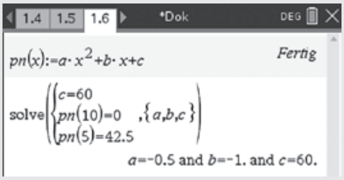


Zentralabitur 2024 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Lösungen Prüfungsteil B

Aufgabe 1B

a) **Mindestangebotspreis und Gleichgewichtspreis bestimmen**



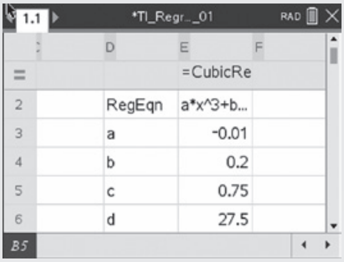
Nachfragefunktion: $p_N(x) = ax^2 + bx + c$

Höchstpreis: $p_N(x) = ax^2 + bx + 60$

Sättigungsmenge: $p_N(10) = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 60 = 0$

Punktangabe: $p_N(5) = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 60 = 42{,}5$

$\Rightarrow\ p_N(x) = -0{,}5x^2 - x + 60$



Angebotsfunktion

Regression 3. Grades $p_A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$a = -0{,}01;\ b = 0{,}2;\ c = 0{,}75;\ d = 27{,}5$

$\Rightarrow p_A(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}75x + 27{,}5$

Mindestangebotspreis: $p_A(0) = 27{,}5$

Der Mindestangebotspreis liegt bei 27,5 GE/ME.

Gleichgewichtspreis

$p_A(x) = p_N(x)\ \Rightarrow x_G \approx 5{,}88$

$p_A(5{,}88) \approx 36{,}80 \quad MG(5{,}88 \mid 36{,}80)$

Der Gleichgewichtspreis liegt bei 36,80 GE/ME.

Produzentenrente ermitteln

$$PR = x_G \cdot p_G - \int_0^{x_G} p_A(x)dx$$

$$PR = 5{,}88 \cdot 36{,}80 - \int_0^{5{,}88} (-0{,}01x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}75x + 27{,}5)dx \approx 31{,}15$$

Die Produzentenrente beträgt ca. 31,15 GE.

Preis bestimmen, bei dem die Nachfrage fließend reagiert und Erläuterung

Funktion für die Nachfrageelastizität aufstellen

$$e(x) = \frac{p_N(x)}{p_N'(x) \cdot x} = \frac{-0{,}5x^2 - x + 60}{(-x - 1) \cdot x}$$

Menge bestimmen, bei der die Nachfrage fließend reagiert

$e(x) = -1 \ \Rightarrow x \approx 5{,}69$

Preis bestimmen

$p_N(5{,}69) = -0{,}5 \cdot 5{,}69^2 - 5{,}69 + 60 \approx 38{,}12$

Erläuterung für die Geschäftsführung

Wenn der Preis von 38,12 GE/ME um 1 % erhöht wird, sinkt die Nachfrage um 1 %.

Wenn der Preis von 38,12 GE/ME um 1 % gesenkt wird, steigt die Nachfrage um 1 %.