Ott | Rosner

Abiturprüfung in Mathematik

Analysis, Stochastik

Wahlgebiet: Vektorgeometrie

Berufliches Gymnasium

Baden-Württemberg

2023

mit Lernvideos

Schülergerechte Lösungen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * *

Umschlag Bild: © frhuynh - Fotolia.com

2. Auflage 2022

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0384-02
ISBN 978-3-8120-1090-0

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung dient zur Vorbereitung auf das **Abitur 2023** an beruflichen Gymnasien und ist auf die aktuell gültige Prüfungsordnung abgestimmt.
Für die Abiturprüfung 2023 gelten Vorgaben, die den Ablauf und die prüfungsrelevanten Stoffgebiete betreffen.
Weitere Erläuterungen finden Sie auf den Seiten 5 und 6 und in einem ausführlichen Video.

Die Aufgaben sind nach den Prüfungsgebieten Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra gegliedert, was den Schülerinnen und Schülern ein gezieltes Üben ermöglicht.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Dem neuen Abiturmodus wird durch eine Vielzahl von Aufgaben für Teil 1, der ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss, und für die Teile 2 – 4, bei denen Hilfsmittel zugelassen sind, Rechnung getragen.
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich, um den beruflichen Gymnasien aller Richtungen gerecht zu werden.
Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Da die Aufgabensammlung allen Schülerinnen und Schülern bei der **selbstständigen** Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche und schülergerechte Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Zur Unterstützung des Lernerfolges sind **alle Hauptprüfungen ab 2016/2017** in einigen **Lernvideos** aufgearbeitet.
In der Sprache der Abiturientinnen und Abiturienten werden alle Aufgabenteile ausführlich gelöst.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Abiturprüfung 2023 in Mathematik

www.mvurl.de/oxfg

Zu Beginn: SchülerIn erhält alle Aufgabenteile (1 bis 4), jedoch keine Hilfsmittel

Phase 1: Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils

Teil	Thema	Auswahl	Zeitrichtwert	Punkte
1	Analysis (50%) Stochastik (25%) Wahlgebiet: Vektorgeometrie/Matrizen (25%)	keine	90 min	30

Nach endgültiger Abgabe von Teil 1 erhält SchülerIn die Hilfsmittel

- SchülerIn erhält **eine Aufgabe** aus der Stochastik und **eine** aus dem Wahlgebiet. Die Lehrkraft wählt diese aus jeweils zwei Aufgaben aus.

Phase 2: Bearbeitung der Teile mit Hilfsmitteln (Taschenrechner + Merkhilfe)

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Thema</th><th>Auswahl</th><th>Zeitrichtwert</th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Analysis (ca. 67%)</td><td>keine</td><td rowspan="2">120 min</td><td rowspan="2">30</td></tr>
<tr><td>Anwendungsorientierte Analysis (ca. 33%)</td><td>SchülerIn wählt eine aus drei Aufgaben</td></tr>
<tr><td>3
4</td><td>Entweder Stochastik oder
Vektorgeometrie/Matrizen</td><td>SchülerIn wählt eine aus zwei vorgelegten Aufgaben</td><td>60 min</td><td>15</td></tr>
</table>

Hinweise

- Die Prüfung dauert insgesamt maximal 270 Minuten.
  Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 75 Punkte.
- SchülerIn erhält **zwei Aufgaben entweder** aus der Stochastik oder aus dem Wahlgebiet (Vektorgeometrie oder Prozesse/Matrizen) vorgelegt. Die Auswahl (Stochastik oder Wahlgebiet) trifft die Lehrkraft

Aufgabenerstellung für die Abiturprüfung 2023 am Beruflichen Gymnasium

Prüfungsrelevante Stoffgebiete:

Schwerpunktmäßig beziehen sich die Aufgaben jeweils auf eine der entsprechenden Lehrplaneinheiten des Bildungsplans, in allen Aufgaben können aber auch Inhalte aus den anderen vier genannten LPE vorkommen:

Teil 1: Analysis
Stochastik
Lineare Algebra: Vektorgeometrie bzw. mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Teil 2: Analysis
Anwendungsorientierte Analysis

Teil 3: Stochastik

Teil 4: Lineare Algebra: Vektorgeometrie bzw. mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Prüfungsmodalitäten: Siehe Seite 5

Hinweise zu Teil 1:

Der Lehrkraft werden jeweils zwei Aufgaben aus der Stochastik und aus dem Wahlgebiet (entweder Vektorgeometrie oder Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen) vorgelegt. Die Lehrkraft wählt jeweils eine Aufgabe aus der Stochastik und eine Aufgabe aus dem Wahlgebiet aus.

Hinweise zu Teil 3 bzw. Teil 4:

Der Lehrkraft werden zwei Aufgaben aus der Stochastik und zwei Aufgaben aus dem Wahlgebiet (entweder Vektorgeometrie oder Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen) vorgelegt. Die Lehrkraft wählt entweder beide Aufgaben aus der Stochastik oder beide Aufgaben aus dem Wahlgebiet aus. Den Schülerinnen und Schüler werden diese zwei Aufgaben vorgelegt, davon wählen sie eine Aufgabe aus.
Für das Sachgebiet Analysis ist keine veränderte Auswahl vorgesehen.

Allgemeiner Hinweis:

Die Schülerinnen und Schüler erhalten alle Aufgabenteile zu Beginn der Prüfung. Dabei ist Teil 1 in einer Mappe und die Teile 2, und entweder Teil 3 oder Teil 4 in einer zweiten Mappe den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung zu stellen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die Aufgabenteile 2, 3 und 4 werden genau dann ausgegeben, wenn Teil 1 in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurden.

I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

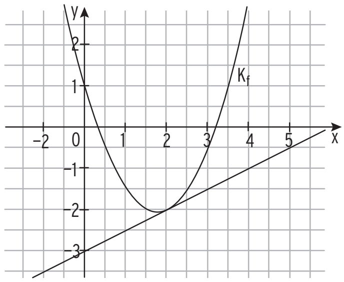
1 Übungsaufgaben

1.1 Analysis Übungsaufgaben

Lösungen Seite 21 - 23

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe 2

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 3

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1 \mid 1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von K in S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)\,dx$.
Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 7 **Lösungen Seite 23/24**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4e^{2x} - 2$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(0{,}5) = -1$.

Aufgabe 8

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Aufgabe 9

Die täglichen Heizkosten eines Hauses werden durch k(t) dargestellt.

Dabei ist t die Zeit in Tagen seit dem 1. Januar des Jahres.

Was bedeutet $\int_0^{90} k(t)dt$ bzw. $\frac{1}{90}\int_0^{90} k(t)dt$?

Aufgabe 10

Die Entwicklung der Gesamtkosten der Produktion von Fahrrädern kann durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$ beschrieben werden.
Berechnen Sie das Minimum der variablen Stückkosten und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 11

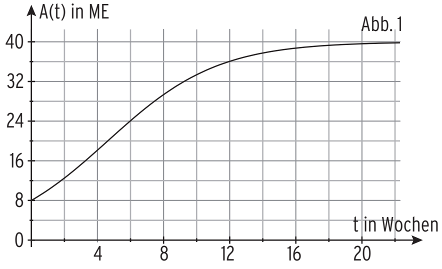
Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 12

Abb. 1 zeigt den Gesamtabsatz eines Produktes in den ersten 20 Wochen nach Einführung.

a) Erläutern Sie, wie sich der Gesamtabsatz langfristig entwickeln wird.

b) Bestimmen Sie in etwa den Zeitpunkt, an dem die momentane Änderungsrate maximal ist. Kennzeichnen Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung.



Aufgabe 13 **Lösungen Seite 24/25**

Wenn das Medikament durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion g mit

$$g(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0{,}05t});\ t \geq 0$$

(t in Minuten seit Infusionsbeginn, g(t) in mg).

Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden?

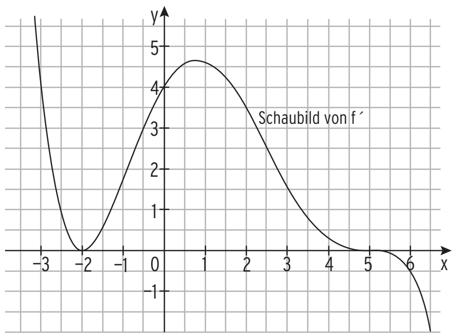
Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut ständig zunimmt.

Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut $1\,\frac{\text{mg}}{\text{min}}$?

Aufgabe 14

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f. Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig, falsch oder nicht entscheidbar ist. Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

1. Das Schaubild von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.
2. Das Schaubild von f hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Wendepunkte.
3. Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkt mit der y-Achse steiler als die erste Winkelhalbierende
4. $f(0) > f(5)$



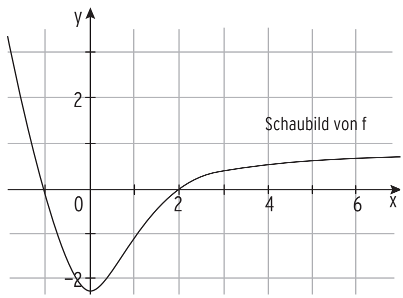
Aufgabe 15

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f. F ist eine Stammfunktion von f.

a) Welche Aussagen über F ergeben sich daraus im Bereich $-2 < x < 7$ hinsichtlich Extremstellen, Wendestellen, Nullstellen? Begründen Sie Ihre Antworten.

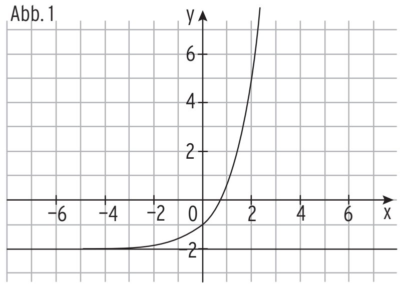
b) Begründen Sie, dass $F(6) - F(2) > 1$ gilt.

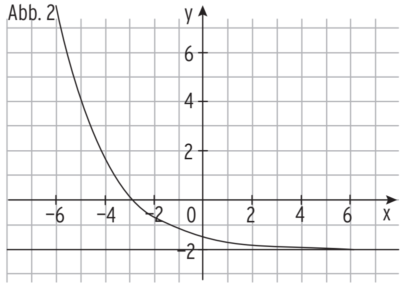
c) Bestimmen Sie näherungsweise: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

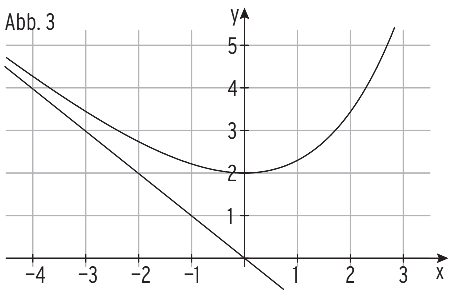


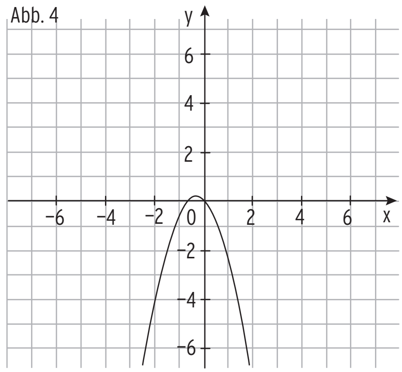
Aufgabe 16 **Lösungen Seite 25/26**

Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen, jeweils mit sämtlichen Asymptoten.









Drei dieser vier Schaubilder werden beschrieben durch die Funktionen f, g und h mit $f(x) = ae^{0,5x} - x$, $g(x) = -2 + be^{-0,5x}$, $h(x) = cx^2 - x$

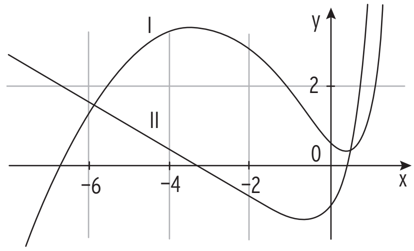
a) Ordnen Sie den Funktionen f, g und h das jeweils passende Schaubild zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Bestimmen Sie die Werte für a, b und c.

Aufgabe 17

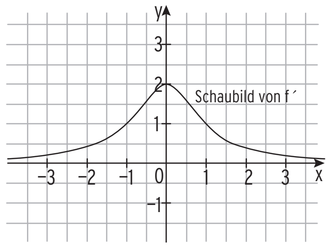
Die Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion und der zugehörigen Ableitungsfunktion. Entscheiden Sie, welcher der Graphen I und II die Ableitungsfunktion darstellt.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Aufgabe 18 **Lösungen Seite 26**

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f.
Welcher der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar ?
Begründen Sie Ihre Antworten.



1. f ist streng monoton wachsend für $-3 < x < 3$.
2. Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendpunkt.
3. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
4. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [-3;3]$.

Aufgabe 19

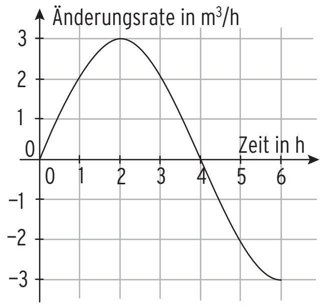
Eine nicht lineare Funktion h hat keine Nullstelle. Der Graph von h nähert sich für $x \to -\infty$ asymptotisch der Geraden mit der Gleichung $y = -3$.

Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von h an und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen.

Aufgabe 20

Abbildung 1 stellt für einen Wassertank die Zufluss- bzw. Abflussrate (in $\frac{m^3}{h}$) von Wasser für einen Beobachtungszeitraum von sechs Stunden dar. Zu Beginn der Beobachtung enthält der Tank 2 m^3 Wasser.

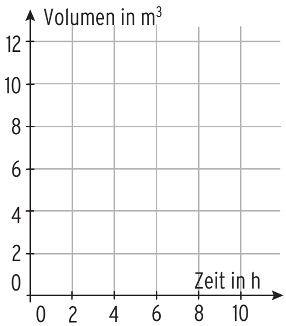
Abb. 1



a) Bestimmen Sie das Volumen des Wassers, das sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank befindet.

b) Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen, der die Entwicklung des Volumens des Wassers im Tank in Abhängigkeit von der Zeit darstellt.

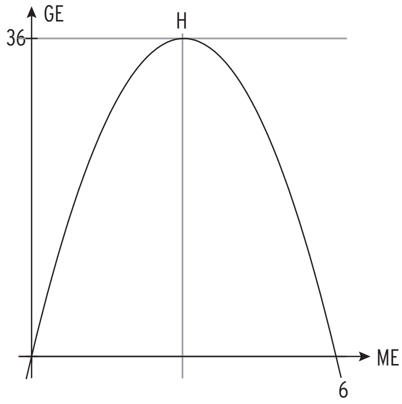
Abb. 2



Aufgabe 21 **Lösungen Seite 27/28**

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm für die Erlösfunktion unter der Voraussetzung, dass es sich um eine ganzrationale Funktion 2. Grades handelt.

b) Ergänzen Sie den Graphen der 1. Ableitung in das Koordinatensystem. Beschreiben Sie den Verlauf des Ableitungsgraphen mathematisch und ökonomisch.



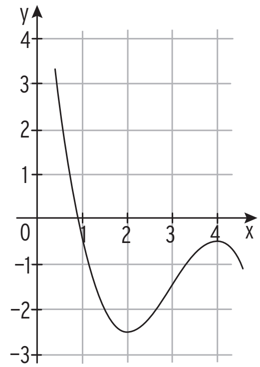
Aufgabe 22

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit

$f(x) = -0{,}5 \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7{,}5;\ x \in \mathbb{R}$.

1 Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung $0 = -0{,}5 \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7{,}5$ nur genau eine Lösung hat.

2 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f.



Aufgabe 23

Das Rechteck ABCD mit A(− 2 | 0), B(2| 0), C(2 | 2) und D(− 2| 2) wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}$, in zwei Teilflächen zerlegt. Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

Aufgabe 24

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = e^{4x}$ und $g(x) = e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder der Funktionen f und g genau einmal schneiden.

Aufgabe 25

Bestimmen Sie die Stammfunktion von g mit $g(x) = 2e^{-4x} + 4x - 3;\ x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y-Achse bei 6 schneidet.

1.2 Stochastik Übungsaufgaben

Lösungen Seite 28/29

Aufgabe 1

a) Ein Fußballspieler verwandelt erfahrungsgemäß 80 % aller Strafstöße.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von vier Strafstößen

- nur den letzten?
- mindestens einen?

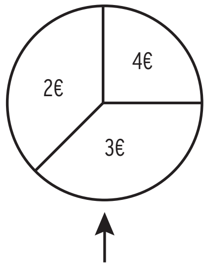
b) Für ein Ereignis C gilt: $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$

Geben Sie geeignete Werte für a, b und k an.

Beschreiben Sie das Ereignis C in Worten.

Aufgabe 2

Bei einem Glücksspiel wird das abgebildete Glücksrad benutzt. Als Einsatz bezahlt man 3 €. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Man erhält den Betrag ausbezahlt, dessen Sektor über dem Pfeil zu stehen kommt. Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn des Spielers.



Aufgabe 3

Eine Urne enthält 5 rote, 3 weiße und 2 gelbe Kugeln.

a) Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man keine gelbe Kugel?

b) Nun werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kugeln die gleiche Farbe?

Aufgabe 4

Bei einer Lotterie führen 5 % der Lose zu einem Gewinn. Nils kauft 14 Lose. Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird.

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

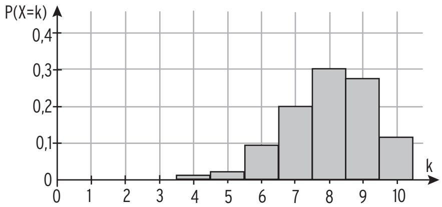
b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$

d) $14 \cdot 0{,}05$

Aufgabe 5 **Lösungen Seite 29/30**

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe. Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben. Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,8 angenommen. In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

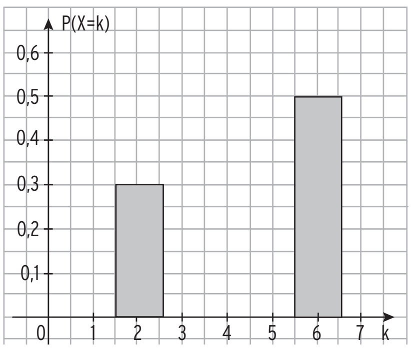


a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-mal trifft.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$ ist.

Aufgabe 6

Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte 2, 4 und 6 annehmen kann. In der Abb. ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X unvollständig dargestellt.



a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit P(X = 4) an. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

b) Das Zufallsexperiment wird zweimal unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße notiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt dieser beiden Werte den Wert 12 ergibt.

Aufgabe 7 **Lösungen Seite 30/31**

An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.

a) Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt:

$$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal?

Aufgabe 8

Ein Glücksrad hat die Sektoren mit den Zahlen 1, 2 und 3 mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Sektor	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,5

Das Glücksrad wird zu folgendem Glücksspiel verwendet: Der Spieler zahlt zunächst 1 € Einsatz. Dann wird das Glücksrad dreimal gedreht. Sind die drei ermittelten Zahlen verschieden, bekommt der Spieler seinen Einsatz zurück. Kommt dreimal die „1“, erhält der Spieler 100 €. Sonst erhält er nichts.
Ist dieses Spiel fair?

Aufgabe 9

Die Zürla-Kohlin GmbH bezieht von einem Zulieferer seit Jahren selbstsichernde Muttern in großen Mengen, bei denen zwei Fehlerarten auftreten: Falsche Form und fehlerhaftes Gewinde.
Insgesamt sind nur 90 % aller Muttern fehlerfrei, d. h. sie haben weder eine falsche Form noch ein fehlerhaftes Gewinde. 5 % der Muttern haben eine falsche Form. 40 % der Muttern mit falscher Form haben auch ein fehlerhaftes Gewinde.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Mutter mit fehlerhaftem Gewinde auch ein falsche Form?

Aufgabe 10

Bei der laufenden Produktion sind erfahrungsgemäß 90 % der Bauteile einwandfrei. Zu Prüfzwecken wird eine Stichprobe entnommen.

1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

E_1: Die ersten zwei Bauteile sind einwandfrei.

E_2: Genau zwei der ersten drei Bauteile sind defekt.

2 Die Standardabweichung für die binomialverteilte Anzahl der defekten Bauteile in der Stichprobe beträgt $\sigma = 3$. Bestimmen Sie den Stichprobenumfang.

Aufgabe 11 Lösungen Seite 31

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}6$.

a) Welche der Abbildungen zeigt die Verteilung von X?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

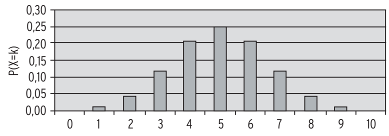


Abb. 1

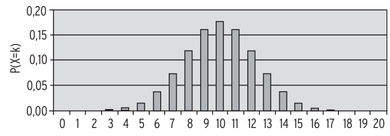


Abb. 2

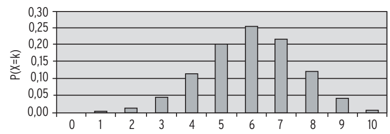


Abb. 3

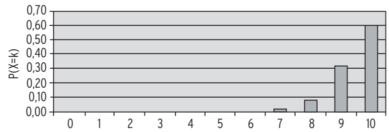


Abb. 4

b) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise $P(4 < X < 7)$
und $P(X \neq 5)$.

Aufgabe 12

Ein Basketballspieler übt Freiwürfe. Erfahrungsgemäß trifft er bei 80% seiner Würfe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er mit den ersten beiden Würfen zweimal?
Geben Sie Ereignisse A und B an, so dass gilt:

$P(A) = 0{,}2^{10}$ $\qquad$ $P(B) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}8^{40} \cdot 0{,}2^{10}$

Aufgabe 13

Erfahrungsgemäß sind 4 % der produzierten Smartphones eines Herstellers defekt. Ein Lieferant erhält ein Paket mit 50 Smartphones des Herstellers.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens ein defektes Smartphone?
Geben Sie einen Term an.

Aufgabe 14

Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch. Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.

B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

1.3 Vektorgeometrie Übungsaufgaben

Lösungen Seite 32/33

Aufgabe 1

1 Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Stellen Sie die Gerade g in einem räumlichen Koordinatensystem dar.

Beschreiben Sie die Lage von g im Raum.

2 Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems

$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

Bestimmen Sie gegebenenfalls die Lösung.

Aufgabe 2

1 Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

1.1 Untersuchen Sie, ob es einen Punkt auf g gibt, dessen drei Koordinaten identisch sind.

1.2 Die Gerade h verläuft orthogonal zu g und durch Q(8 | 5 | 10). Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

2 Gegeben ist die Ebene E: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 28$.

Es gibt zwei zu E parallele Ebenen F und G, die vom Ursprung den Abstand 2 haben. Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung von F und G.

Aufgabe 3

1 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1 | 2 | 5), B(2 | 7 | 8) und C(− 3 | 2 | 4) gegeben.

1.1 Weisen Sie nach, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind.

1.2 Für jede reelle Zahl a ist ein Punkt $D(a \mid 2+ a\sqrt{2} \mid 5 + \sqrt{2})$ gegeben. Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Strecke von A nach D die Länge 2 hat.

2 Gegeben sind die Ebene E: $2x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ sowie der Punkt P(− 3 | 0 | 2).

2.1 Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.

2.2 Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Punkt P*. Ermitteln Sie die Koordinaten von P*.

Aufgabe 4

Lösungen Seite 34/35

1 Gegeben ist die Ebene E durch $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u, v \in \mathbb{R}$

Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an,

(A) die in der Ebene E liegt,

(B) die keine gemeinsamen Punkte mit E hat.

2 Zeichnen Sie einen Würfel mit der Kantenlänge 3 LE in ein räumliches Koordinatensystem. Markieren Sie eine Kante und geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der diese Kante liegt.

Aufgabe 5

1 Gegeben ist die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

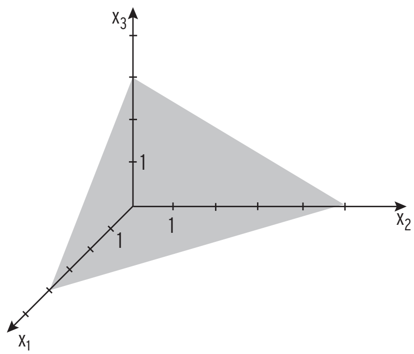
Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an, die

a) parallel zu g durch P (0| 1| –2) verläuft,

b) g rechtwinklig schneidet.

2 Ermitteln Sie eine Gleichung der dargestellten Ebene.

Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des Abstands vom Ursprung zur Ebene.



Aufgabe 6

Gegeben sind die Punkte A(3| 1| 1) und B(−2| 2| 4) sowie die Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

1 Bestätigen Sie, dass g durch A und B geht.

2 Die Geraden g und h haben genau einen Schnittpunkt. Bestimmen Sie diesen Schnittpunkt.

3 Geben Sie einen weiteren Punkt auf g an, der von A den gleichen Abstand hat wie B.

Aufgabe 7

Lösungen Seite 36/37

Gegeben ist die Ebene E_1: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

1 Zeigen Sie, dass alle Punkte der Ebene E_1 die folgende Gleichung erfüllen:

$7x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$

2 Geben Sie für die Ebene E_2: $\vec{x} = p\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + q \cdot \vec{v}$; $p, q \in \mathbb{R}$.

einen Vektor $\vec{v}$ so an, dass die Ebene E_2 nicht identisch mit der Ebene E_1 ist.

Begründen Sie, dass der von Ihnen angegebene Vektor $\vec{v}$

die Bedingung erfüllt.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}5\\-7\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

1 Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ orthogonal zu $\vec{b}$ und nicht orthogonal zu $\vec{c}$ ist.

2 Gegeben ist ein weiterer Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix}-4\\4\\d\end{pmatrix}$ mit $d \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass bei geeigneter Wahl von d der Vektor $\vec{d}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und auch orthogonal zu $\vec{b}$ sein kann, aber nicht zu beiden Vektoren gleichzeitig.

Aufgabe 9

1 Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(-3|1|4)$, $C(2|-4|4)$ und $D(5|-5|0)$.

Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

2 In einem kartesischen Koordinatensystem ist die senkrechte Pyramide ABCDS gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide 7.

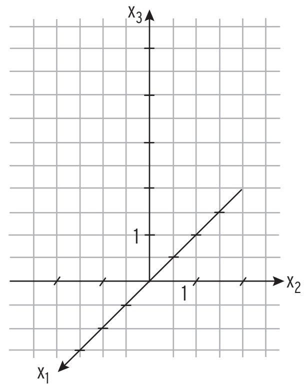
2.1 Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.

2.2 Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 10 **Lösungen Seite 37/38**

3 Gegeben sind die Punkte A(2 | − 2 | 1) , B(− 2| 2| 1) und C(− 2| − 2| 5).

3.1 Zeichnen Sie die Punkte A, B und C in das nebenstehende Koordinatensystem ein.



3.2 Die Verbindungsvektoren der drei Punkte sind die Vektoren

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CA}$.

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ein gleichseitiges Dreieck ist.

Aufgabe 11

Im Raum sind eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf der Geraden g liegt, gegeben. Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung der Koordinaten zweier Punkte B und C der Geraden g ,die zusammen mit A ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck bilden.

Aufgabe 12

1 Gegeben ist das eindeutig lösbare Gleichungssystem LGS 1:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 6 \\ 4x_2 - 8x_3 &= -12. \end{aligned}$$

1.1 Berechnen Sie den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ von LGS 1.

1.2 Begründen Sie, warum alle Lösungen des gegebenen Gleichungssystems LGS 1 auch Lösungen des nachfolgenden Gleichungssystems LGS 2 sind.

$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10$

$6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6$

$12x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -12.$

Aufgabe 13

Gegeben sind die Ebenen E: $3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$ und F: $2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden von E und F.

Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat diese Gerade?

2 Aufgabensätze Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabensatz A **Teil 1 ohne Hilfsmittel** **Lösungen Seite 51/52**

(30 Punkte)

Analysis **Punkte**

1.1 Erläutern Sie anhand einer Skizze, ob das Integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx$ größer, kleiner oder gleich Null ist. 3

1.2 Für eine Funktion f gilt: 4

(1) $f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

(2) $f''(-2) = -3$

(3) $f''(1) = 3$

(4) $f(-2) = \frac{19}{3}$

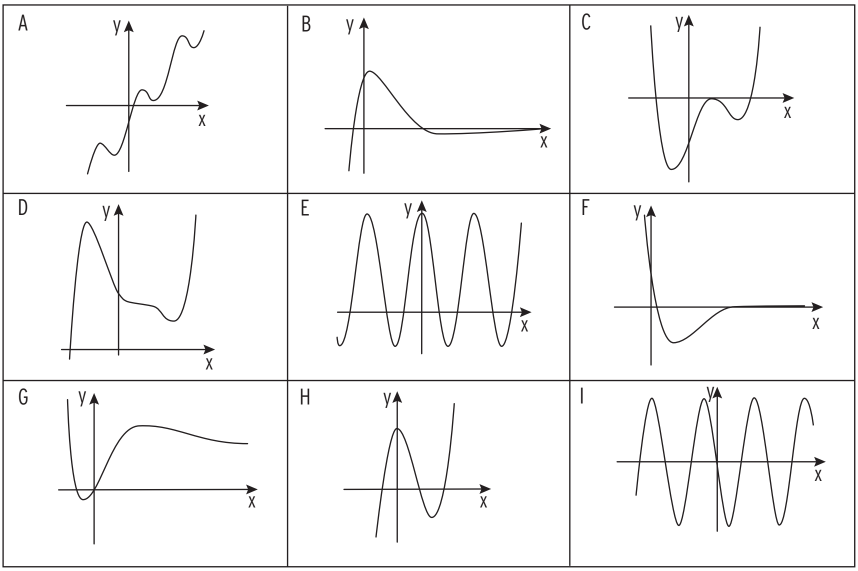
(5) $f(1) = \frac{11}{6}$

Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild von f treffen?

1.3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. 4
Geben Sie die Periode von f an.

Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $\cos(2x) = -1$.

1.4 Die Abbildungen zeigen Schaubilder von drei Funktionen sowie deren zugehörigen ersten und zweiten Ableitungen. Ordnen Sie jeweils dem Schaubild der Funktion das Schaubild ihrer ersten und zweiten Ableitung zu: 5



Aufgabensatz A Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik

Punkte

2.1 Eine Laplace-Münze wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal Zahl und einmal Bild? 2

2.2 Ein Würfel wird 20-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal die Augenzahl 3? Geben Sie eine Term an. 2

2.3 Bei einer Blutspendenaktion werden die Blutgruppen der Spender bestimmt. 2
Ein Ereignis ist: „In einer Gruppe von fünf Freunden hat niemand die Blutgruppe Null.“
Beschreiben Sie das Gegenereignis in Worten.

2.4 Die Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung: 2

x_i	-3	-1	0	5
$P(X = x_i)$	0,2	u	w	0,2

Der Erwartungswert von X beträgt 0,2.

Berechnen Sie u und w.

Vektorgeometrie

3 Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 mit

E_1: $6x_1 - x_2 - 4x_3 = 12$ und E_2: $-3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -6$.

Die Punkte $A(2|0|0)$ und $B(0|0|-3)$ liegen in beiden Ebenen.

3.1 Begründen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 nicht identisch sind. 1

3.2 Ermitteln Sie die Koordinaten eines von A und B verschiedenen Punktes, der ebenfalls in beiden Ebenen liegt. 2

3.3 In der Gleichung von E_2 soll genau ein Koeffizient so geändert werden, dass eine Gleichung der Ebene E_1 entsteht. 2

Geben Sie diese Änderung an und begründen Sie Ihre Antwort.

30

Aufgabensatz B Teil 1 ohne Hilfsmittel Lösungen Seite 53-55

Analysis **Punkte**

1.1 Lösen Sie die Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$. 3

1.2 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt. 3

Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist.

1.3 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f. 6

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

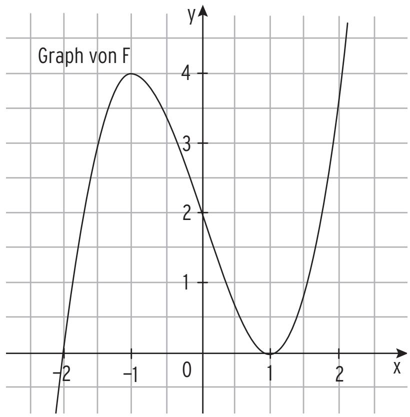
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$

(2) $\int_0^2 f(x)dx = 4$

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

(4) $f(F(-2)) > 0$



1.4 Gegeben ist die in ℝ definierte Funktion $f(x) = \sin(x)$. Es gilt $\int_0^{0,5\pi} f(x)dx = 1$.

1.4.1 Geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} f(x)dx$ an. 1

1.4.2 Begründen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion, dass 2

$\int_0^{5\pi} f(x)dx = 2$ gilt.

1.4.3 Beschreiben Sie, wie der Graph der in ℝ definierten Funktion h mit 3

$h(x) = 1 + 2\sin(4x)$ aus dem Graphen von f hervorgeht.

Aufgabensatz B Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik

Punkte

2 Bei einem Glücksrad werden die Zahlen 1, 2, 3 und 4 beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt:

Zahl	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,1	0,3	0,2

2.1 Das Glücksrad wird einmal gedreht. Geben Sie verschiedene Ereignisse an, deren Wahrscheinlichkeit jeweils 0,7 beträgt. 2

2.2 An dem Glücksrad sollen nur die Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2 so verändert werden, dass das folgende Spiel fair ist: Für einen Eisatz von 2,50 € darf man einmal am Glücksrad drehen. Die angezeigte Zahl gibt den Auszahlungsbetrag in Euro an. Bestimmen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2. 4

Vektorgeometrie

3 Gegeben sind die Punkte $A(6|\,2|\,-4)$ und $K(2|\,0|\,-1)$.

3.1 Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke AB und der Punkt K ist der Mittelpunkt der Strecke AM. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B. 2

3.2 Geben Sie die Koordinaten eines Punktes C an, sodass $\overrightarrow{AC}$ orthogonal zu $\overrightarrow{AK}$ ist. 2

3.3 Die Punkte A, B und C bestimmen im Raum eine Ebene E, deren Koordinatengleichung bekannt sei. Eine Gerade g verläuft durch die Punkte P und Q, diese Punkte P und Q liegen außerhalb der Ebene E und seien ebenfalls bekannt.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur rechnerischen Überprüfung, ob ein Durchstoßpunkt der Geraden g durch die Ebene E existiert. 2

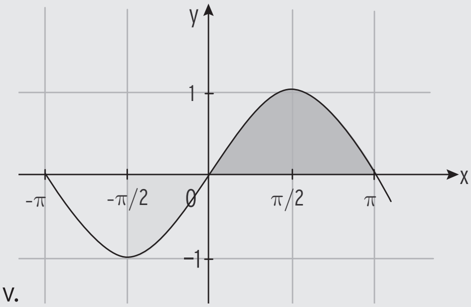
30

Lösungen Aufgabensätze Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabensatz A Analysis **Teil 1 ohne Hilfsmitte** **Aufgaben Seite 39/40**

1.1 Skizze:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx > 0$$



Die Fläche oberhalb der x-Achse ist größer als die Fläche unterhalb der x-Achse. Daher ist der Integralwert positiv.

1.2 Bedeutung der einzelnen Bedingungen

(1) waagrechte Tangente in $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

(2) $x_1 = -2$ ist Maximalstelle

(3) $x_2 = 1$ ist Minimalstelle

(4) Kurvenpunkt $H(-2 \mid \frac{19}{3})$

(5) Kurvenpunkt $T(1 \mid \frac{11}{6})$

Aussagen über das Schaubild von f: Das Schaubild besitzt den Hochpunkt $H(-2 \mid \frac{19}{3})$ und den Tiefpunkt $T(1 \mid \frac{11}{6})$.

1.3 $f(x) = \cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$

Periode von f: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Skizze von K_f:

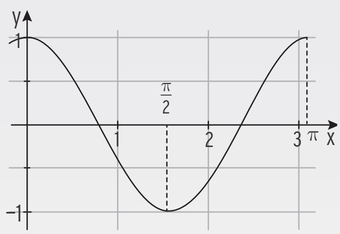
Lösung der Gleichung $\cos(2x) = -1$:

Substitution $2x = z$ ergibt $\cos(z) = -1$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $z = \pi$.

Mit $2x = \pi$ ergibt sich $x = \frac{\pi}{2}$.

oder direkt aus einer Skizze:



1.4 Funktion	Schaubild von f	Schaubild von f′	Schaubild von f″
1.	A	E	I
2.	D	C	H
3.	G	B	F

Hinweis: Extremstellen von f sind Nullstellen von f′ mit VZW
Wendestellen von f sind Extremstellen von f′.

Aufgabensatz A Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik

2.1 B: Bild Z: Zahl mit $P(B) = P(Z) = 0{,}5$

Ereignis A: Zweimal Z und einmal B.

$P(A) = P(BZZ) + P(ZBZ) + P(ZZB) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

2.2 X: Anzahl der Würfe mit AZ = 3 bei n = 20 Würfen; $P(AZ = 3) = \frac{1}{6}$

$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot (\frac{5}{6})^{18}$

2.3 Gegenereignis in Worten: In einer Gruppe von fünf Freunden hat mindestens eine Person die Blutgruppe null.

2.4 $E(X) = 0{,}2$

$-3 \cdot 0{,}2 + (-1) \cdot u + 0 \cdot w + 5 \cdot 0{,}2 = 0{,}2$ für $u = 0{,}2$

Ferner gilt für $u = 0{,}2$: $0{,}2 + 0{,}2 + w + 0{,}2 = 1$

Somit ist $w = 0{,}4$.

Vektorgeometrie

3.1 Eine Punktprobe liefert die Begründung.

Z. B.: $P(0 \mid 0 \mid -3)$ oder $P(0 \mid -6 \mid -1{,}5)$ liegt auf E_1, aber nicht auf E_2

oder $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & -4 & 12 \\ -3 & 5 & 2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & -4 & 12 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $x_2 = 0$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar, die beiden Ebenen schneiden sich, sind also nicht identisch.

3.2 Alle Punkte auf der Geraden (AB) sind gemeinsame Punkte von E_1 und E_2

Gleichung der Geraden g durch A und B:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

Z. B. ergibt sich für r = 1 der Punkt $C(4 \mid 0 \mid 3)$, der auf beiden Ebenen liegt.

3.3 Der Koeffizient 5 ist in 0,5 zu verändern.

Multipliziert man die veränderte Koordinatengleichung für E_2 mit − 2, dann ergibt sich die Koordinatengleichung für E_1 .

Aufgabensatz B **Teil 1 ohne Hilfsmittel** **Aufgaben Seite 41/42**

Analysis

1.1 Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x} \quad | \cdot e^x$

$3e^x - e^{2x} = 2$

Substitution: $u = e^x$ $\quad 3u - u^2 - 2 = 0$ bzw. $u^2 - 3u + 2 = 0$

Lösung z. B. mit Formel: $u_1 = 1;\ u_2 = 2$

Rücksubstitution: $u_1 = e^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$

$u_2 = e^x = 2 \Rightarrow x_2 = \ln(2)$

1.2 $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x;\ f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1;\ f''(x) = -x + 2;\ f'''(x) = -1$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $\quad x = 2$

Mit $f(2) = \frac{2}{3}$ und $f'''(2) = -1 \neq 0$ ergibt sich der Wendepunkt $W(2 \mid \frac{2}{3})$

Punktprobe mit W in $y = x - \frac{4}{3}$: $\quad \frac{2}{3} = 2 - \frac{4}{3}$ wahr

$f'(2) = 1$ (Steigungen stimmen überein)

$y = x - \frac{4}{3}$ ist eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

1.3 (1) Die Aussage ist wahr;

T (1 | 0) ist Tiefpunkt des Graphen von F, also gilt F(1) = 0

und auch $F'(1) = f(1) = 0$

(2 Die Aussage ist falsch; es ist $\int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = 4 - 2 = 2 \neq 4$

(3) Die Aussage ist wahr; F besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Wendestelle,

somit besitzt $F'' = f'$ eine Nullstelle in diesem Bereich

(4) Die Aussage ist falsch; $F(-2) = 0;\ f(F(-2)) = f(0) = F'(0) < 0$

1.4.1 Es gilt: $\int_0^{0,5\pi} f(x)dx = 1$; der Graph von f mit f(x) = sin(x) ist symmetrisch zu O.

$\int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} f(x)dx = 0$

1.4.2 Aus der Periodizität ($p = 2\pi$) von f folgt: $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0;\ \int_0^{5\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} f(x)dx$

Der Graph von f schneidet die x-Achse in 0 und in π und ist symmetrisch zu

$x = \frac{\pi}{2}$, also gilt $\int_0^{\pi} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^{0,5\pi} f(x)dx = 2$

Damit: $\int_0^{5\pi} f(x)dx = 2 \cdot 1 = 2$ WW

Aufgabensatz B Teil 1 ohne Hilfsmittel

Analysis

1.4.3 Der Graph von h geht – unter Beachtung der Reihenfolge – aus dem Graphen von f hervor durch:

1. Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung
2. Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ in x-Richtung
3. Verschiebung um 1 in positive y-Richtung

Stochastik

2.1 Beispiel: A: Es erscheint keine 3.

B: Es erscheint eine ungerade Zahl.

2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zahl	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	p	q	0,3	0,2

$q = 1 - 0{,}3 - 0{,}2 - p = 0{,}5 - p.$

Die Zufallsvariable X beschreibt die Auszahlung in €.

Das Spiel ist fair, wenn $E(X) = 2{,}5$ ist.

Es ergibt sich $1 \cdot p + 2 \cdot (0{,}5 - p) + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 = 2{,}5$

$p = 0{,}2$

Daraus folgt $q = 0{,}3.$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit für die Zahl 1 beträgt 0,2 und die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 2 beträgt 0,3.

II Teil der Abiturprüfung mit Hilfsmittel

Übungsaufgaben

Teil 2 Analysis – Anwendungsorientierte Analysis

Auszug aus der Merkhilfe

5 Analysis

Änderungsrate

Durchschnittliche / Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_1]$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Momentane / Lokale Änderungsrate (Ableitung) an der Stelle x_0 $\quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ableitungsregeln

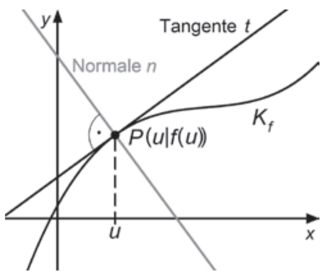
Summenregel	$f(x) = u(x)+v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x)+v'(x)$
Faktorregel	$f(x) = a \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x)+u(x) \cdot v'(x)$

Spezielle Ableitungen / Stammfunktionen mit $C \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^k$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$	$F(x) = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1}+C$ mit $k \neq -1$
$f(x) = e^{bx}$	$f'(x) = b \cdot e^{bx}$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot e^{bx}+C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin(bx)$	$f'(x) = b \cdot \cos(bx)$	$F(x) = -\frac{1}{b} \cdot \cos(bx)+C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(bx)$	$f'(x) = -b \cdot \sin(bx)$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot \sin(bx)+C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$

Tangente und Normale

Tangentensteigung	$m_t = f'(u)$
Tangentengleichung	$y = f'(u)(x-u)+f(u)$
Normalensteigung	$m_n = \frac{-1}{f'(u)}$
Normalengleichung	$y = \frac{-1}{f'(u)}(x-u)+f(u)$



Auszug aus der Merkhilfe

Merkhilfe Mathematik für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden-Württemberg

Untersuchung von Funktionen und ihren Schaubildern

Symmetrie	K_f ist symmetrisch zur y-Achse K_f ist symmetrisch zum Ursprung	$f(-x)=f(x)$ für alle x $f(-x)=-f(x)$ für alle x
Monotonie	f steigt monoton im Intervall J f fällt monoton im Intervall J	$f'(x)\geq 0$ im Intervall J $f'(x)\leq 0$ im Intervall J
Krümmung	K_f ist im Intervall J linksgekrümmt K_f ist im Intervall J rechtsgekrümmt	$f''(x)\geq 0$ im Intervall J $f''(x)\leq 0$ im Intervall J
Hochpunkt	K_f hat den Hochpunkt $H\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$	$f'(x_0)=0$ und VZW +/- von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0)<0$
Tiefpunkt	K_f hat den Tiefpunkt $T\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$	$f'(x_0)=0$ und VZW -/+ von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0)>0$
Wendepunkt	K_f hat den Wendepunkt $W\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$	$f''(x_0)=0$ und VZW von $f''(x)$ bei x_0 oder $f'''(x_0)\neq 0$

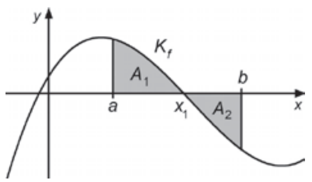
Berechnung bestimmter Integrale

$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Flächenberechnung

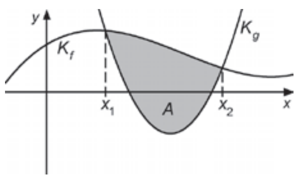
$$A_1=\int_a^{x_1} f(x)\,dx$$

$$A_2=-\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx$$



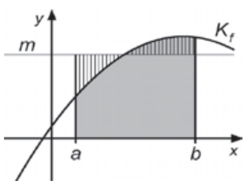
$$A=\int_{x_1}^{x_2}(f(x)-g(x))\,dx$$

falls $f(x)\geq g(x)$ für $x\in[x_1;x_2]$



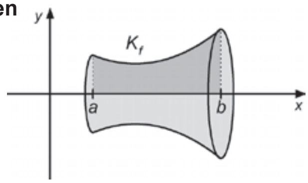
Mittelwert

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



Rotationsvolumen

$$V=\pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx$$



Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis

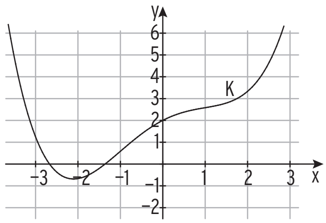
Aufgabe 1 **Lösungen Seite 93/94**

Punkte

1.1 Das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades geht durch den Punkt $S(0 \mid 2)$ und hat den Wendepunkt $W(1 \mid \frac{31}{12})$. Die Normale im Punkt $P(-3 \mid \frac{5}{4})$ hat die Steigung $\frac{1}{5}$. Stellen Sie ein LGS zur Bestimmung des Funktionsterms auf. 5

1.2 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f heißt K .

1.2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K. 6
Zeigen Sie: Die Tangente an K im Schnittpunkt mit der y-Achse ist parallel zu der Geraden durch die Wendepunkte.



1.2.2 Die Gerade mit der Gleichung $y = x + 2$ schließt mit K zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie den Inhalt eines der beiden Flächenstücke. 6
Markieren Sie die berechnete Fläche in einer Skizze.

1.3 C ist das Schaubild der Funktion h mit

$$h(x) = 3\sin(x - 3);\ x \in \mathbb{R}.$$

Wie entsteht das Schaubild C aus dem Schaubild der Funktion k mit $k(x) = \sin(x)$? 5
Geben Sie zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, einen Hoch- und einen Tiefpunkt von C an.

20

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 94/95**

Lösungen Seite 94/95

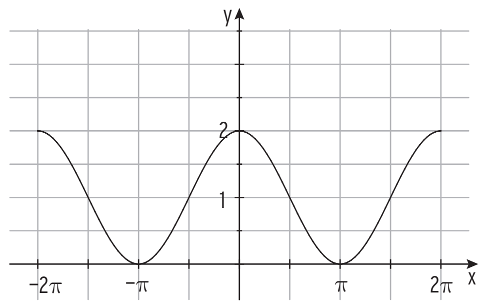
Punkte

2.1 Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 3e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

2.1.1 Das Schaubild von g, die beiden Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 2{,}5$ begrenzen eine Fläche. Zeigen Sie, für den Inhalt dieser Fläche gilt $A = 3 - 3 \cdot e^{-2{,}5}$. 4

2.1.2 Die Fläche aus 2.1.1 rotiert um die x-Achse. Dabei entsteht ein Rotationskörper. Der Rotationskörper wird so durchbohrt, dass die Bohrachse mit seiner Symmetrieachse übereinstimmt. Diese Bohrung hat den Durchmesser 1. Welches Volumen hat der Restkörper? 6

2.2 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f mit $-2\pi < x < 2\pi$.



2.2.1 Begründen Sie anhand der Abbildung, welche der folgenden Aussagen falsch oder wahr sind. 5

- f ist monoton steigend.
- Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
- Das Schaubild von f hat in $P(\frac{\pi}{2} \mid f(\frac{\pi}{2}))$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

2.2.2 Geben Sie einen Funktionsterm von f' an. 5
Die Schaubilder von f und f' schneiden sich auf der y-Achse.
Bestimmen Sie f(x).

20

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis

Aufgabe 3 **Lösungen Seite 95 - 97**

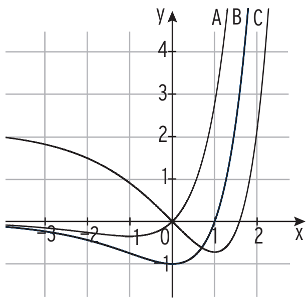
Punkte

1.1 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = e \cdot x + e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K .

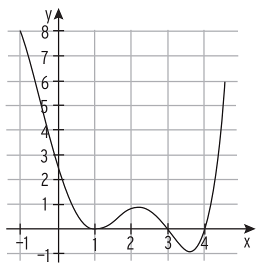
1.1.1 Die Gerade n ist die Normale von K im Schnittpunkt von K mit der y-Achse. Weisen Sie nach, dass es genau eine Tangente an K gibt, die parallel zu n verläuft. 4

1.1.2 Das Schaubild K berührt die x-Achse. Geben Sie den Berührpunkt an. 2

1.2 In der Abbildung sind die Schaubilder der Funktion h, ihrer Ableitungsfunktion h' und einer Stammfunktion H von h eingezeichnet. Ordnen Sie die Schaubilder den Funktionen h, h' und H zu und begründen Sie Ihre Entscheidung. 4



1.3 Die nebenstehende Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion g.



Das Schaubild einer Stammfunktion G von g ist C_G.

1.3.1 Geben Sie alle Stellen an, an denen C_G einen Hochpunkt hat, und alle Stellen an, an denen C_G einen Tiefpunkt hat. Begründen Sie Ihre Angaben. 3

1.3.2 Begründen Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist. 7

(1) $g''(2) > 0$

(2) Im Intervall $[-1; 4{,}5]$ gibt es drei Stellen, an denen das Schaubild C_G die Steigung 4 hat.

(3) Das Schaubild von g' ist monoton fallend für $0 \leq x \leq 1$.

(4) $\int_2^4 g(x)dx < 1$

20

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis

Aufgabe 4 **Lösungen Seite 97/98**

Punkte

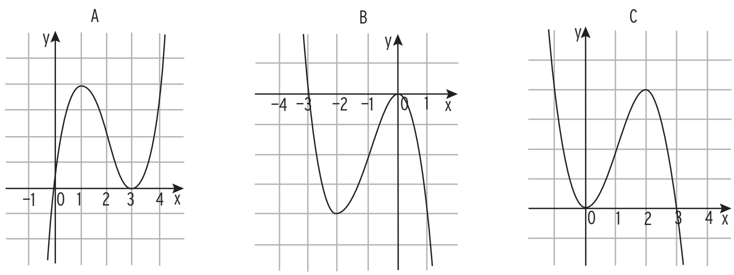
1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2x^2 \cdot (x-3)$; $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K.

1.1 Eine der folgenden Abbildungen zeigt das Schaubild K. 6

Untersuchen Sie für jede der Abbildungen, ob es sich um das Schaubild K handeln kann.

Skizzieren Sie das Schaubild K mit skalierter y-Achse.



1.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f mit der x-Achse einschließt. 5

1.3 Die Gerade mit der Gleichung $y = -4x + 8$ zerlegt die Fläche zwischen K und der x-Achse in zwei Teilflächen. 5

Ermitteln Sie einen Term, mit dem der Inhalt einer der beiden Teilflächen berechnet werden kann und kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze die von Ihnen gewählte Fläche.

1.4 Die Abbildung A zeigt das Schaubild einer Funktion g. 4

Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. $g''(3) < 0$
2. Bei $x = 1$ hat g' einen Vorzeichenwechsel von + nach –.
3. An der Stelle $x = 2$ hat das Schaubild von g' einen Hochpunkt.
4. Die momentane Änderungsrate von g an der Stelle $x = 3$ ist größer als die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall [1; 2].

20

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis

Aufgabe 5 **Lösungen Seite 99/100**

Lösungen Seite 99/100

Punkte

1.1 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion h mit der Definitionsmenge [− 7; 4]. Die Funktion H ist eine Stammfunktion von h. 8

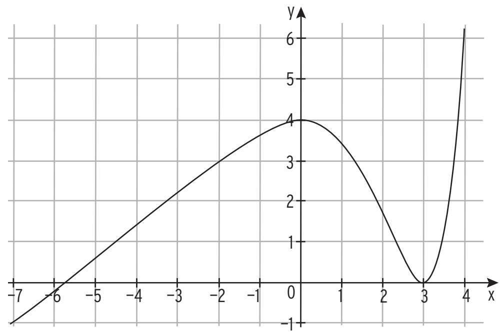
Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) H hat zwei Wendestellen.

(2) $h''(0,5)$ ist größer als $h''(3,5)$.

(3) Die Wertemenge von h' enthält nur Zahlen, die größer als −3 sind.

(4) Das Schaubild von h' ist überall rechtsgekrümmt.



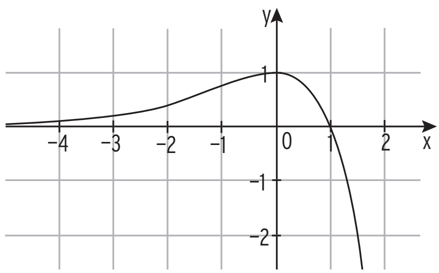
1.2 Gegeben ist die Funktion s mit $s(x) = \frac{1}{2}x + 1 + 2\sin(\frac{\pi}{4}x);\ x \in \mathbb{R}$. 3

Das Schaubild von s ist C.

Untersuchen Sie, welche Werte die Steigung von C annehmen kann.

2 Die Abbildung zeigt den Graphen G der Funktion f mit $f(x) = (1 - x)\cdot e^x$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

Für die zweite Ableitung von f gilt $f''(x) = -(1 + x)\cdot e^x$.



2.1 Bestimmen Sie rechnerisch das Krümmungsverhalten von G. 3

2.2 Auf der y-Achse gibt es Punkte, die auf einer Tangente an G liegen. Geben Sie die y-Koordinaten dieser Punkte an und begründen Sie Ihre Angabe mithilfe des Verlaufs von G. 3

2.3 Für ein $a \in \mathbb{R}$ ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F(x) = (a - x)\cdot e^x$ eine Stammfunktion von f. Bestimmen Sie den Wert von a. 3

20

Mathematik Abitur Teil 3 mit Hilfsmittel

Stochastik

Aufgabe 3 **Lösungen Seite 111**

Punkte

3 Bei einer Abschlussprüfung sind erfahrungsgemäß 20 % der angemeldeten Studierenden Wiederholer. Von diesen treten 12 % von der Prüfung zurück.

Insgesamt treten 83,2 % der angemeldeten Studierenden zur Prüfung an.

3.1 Einer der angemeldeten Studierenden wird zufällig ausgewählt. 8
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Studierende ein Wiederholer und tritt von der Prüfung zurück?
Der Studierende nimmt an der Prüfung teil. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er Wiederholer?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Studierende kein Wiederholer und nimmt an der Prüfung teil?

3.2 Bei der Anmeldung zur Prüfung werden die Studierenden gefragt, ob sie die Prüfung wiederholen.

3.2.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 30 befragten Studierenden 3
a) genau 6 Wiederholer sind?
b) höchstens ein Wiederholer ist?

3.2.2 Wie viele Studierende müssen sich mindestens angemeldet haben, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens ein Wiederholer auf der Anmeldeliste steht? 4

15

Mathematik Abitur Teil 3 mit Hilfsmittel

Stochastik

Aufgabe 4

Lösungen Seite 112/113

Punkte

4 Ein Unternehmen stellt Speicherbausteine her. Diese werden einer Qualitätskontrolle unterzogen, bei der 5 % als Ausschuss aussortiert werden.

4.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass von 50 Speicherbausteinen, die die Qualitätskontrolle durchlaufen, 5
- keiner aussortiert wird
- genau einer aussortiert wird
- mindestens zwei aussortiert werden.

4.2 Die Qualitätskontrolle besteht aus zwei Stufen. In der ersten Stufe werden neunmal so viele Bausteine aussortiert wie in der zweiten Stufe. 4
Für den laufenden Monat ist eine Produktionsmenge von 140000 Bausteinen geplant.
Wie viele Bausteine werden in der ersten Stufe, wie viele in der zweiten Stufe der Qualitätskontrolle voraussichtlich aussortiert?
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Baustein, der die zweite Stufe durchläuft, aussortiert wird.

4.3 Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass 4,5 % aller produzierten Speicherbausteine defekt sind. 6
Trotz Qualitätskontrolle werden nicht alle defekten Bausteine aussortiert.
Erfahrungsgemäß ist einer von 1000 verkauften Bausteinen defekt.
Zudem werden auch Bausteine aussortiert, die nicht defekt sind.
Welcher Anteil nicht defekter Bausteine ist demnach im Ausschuss zu erwarten?

15

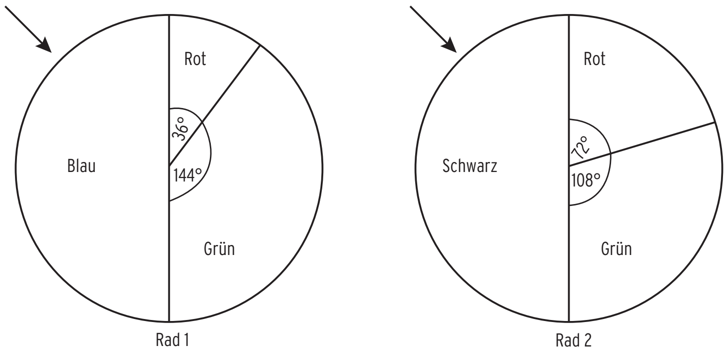
Mathematik Abitur Teil 3 mit Hilfsmittel

Stochastik

Aufgabe 5 Lösungen Seite 113/114

Punkte

5 Zwei Glücksräder sind in je drei verschiedenfarbige Sektoren eingeteilt (siehe Abbildung). Die Räder werden unabhängig voneinander in Drehung versetzt. Bei Stillstand zeigt ein Pfeil bei jedem Rad auf genau einen Sektor.



5.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: 7
E_1: Beide Pfeile zeigen auf Rot.
E_2: Es zeigt mindestens ein Pfeil auf Rot.
E_3: Beide Pfeile zeigen auf verschiedene Farben.

5.2 Es wird folgendes Glücksspiel angeboten:
Der Spieler darf jedes Rad einmal in Drehung versetzen.
Zeigen die Pfeile auf die gleiche Farbe, so erhält der Spieler 1 €.
Zeigt ein Pfeil auf Blau und der andere auf Rot, so erhält der Spieler 3,50 €.
In allen anderen Fällen erhält er nichts.

5.2.1 Welchen Einsatz muss der Spielanbieter verlangen, damit sein Gewinn pro Spiel durchschnittlich 50 Cent beträgt? 4

5.2.2 Wie oft muss ein Spieler mindestens spielen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens einmal eine Auszahlung von 3,50 € erhält, größer als 80 % ist? 4

15

Mathematik Abitur mit Hilfsmittel

Teil 4 Lineare Algebra – Vektorgeometrie

Auszug aus der Merkhilfe

7 Vektorgeometrie

Betrag eines Vektors $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

Einheitsvektor $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$

Länge der Strecke *AB* $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

Mittelpunkt *M* einer Strecke *AB* $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

Orthogonalität $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

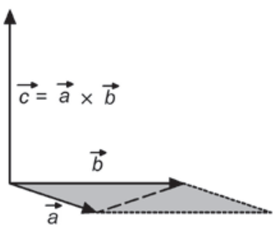
Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ keine Vielfachen voneinander

Flächeninhalt eines Parallelogramms $A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

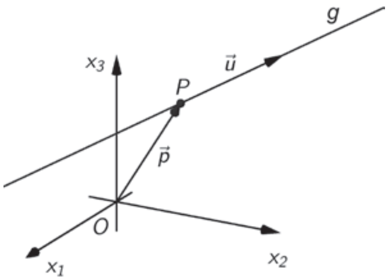
Flächeninhalt eines Dreiecks $A = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

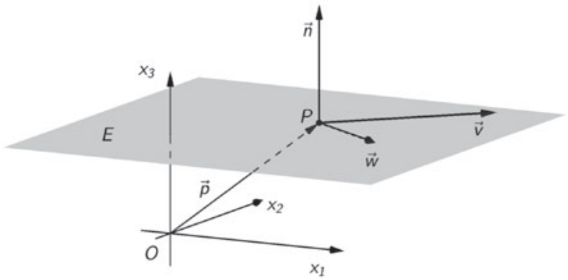


Auszug aus der Merkhilfe

Gerade und Ebene im Raum

mit Stützvektor $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$, Richtungsvektor $\vec{u}$, Spannvektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und Normalenvektor $\vec{n}$





Parameterform	$g: \vec{x} = \vec{p}+r\cdot\vec{u}$ mit $r \in \mathbb{R}$	$E: \vec{x} = \vec{p}+s\cdot\vec{v}+t\cdot\vec{w}$	mit $s, t \in \mathbb{R}$
Normalenform		$E: (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n} = 0$	
Koordinatenform		$E: n_1 x_1+n_2 x_2+n_3 x_3 = b$	mit $b \in \mathbb{R}$

Winkel

zwischen zwei Geraden $\cos(\alpha)=\dfrac{|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|}$

zwischen Gerade und Ebene $\sin(\alpha)=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$

zwischen zwei Ebenen $\cos(\alpha)=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$

Abstand

zwischen Punkt A und Ebene $E: (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n} = 0$ $\quad d=\left|\dfrac{(\vec{a}-\vec{p})\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$

zwischen Punkt A und Ebene $E: n_1 x_1+n_2 x_2+n_3 x_3 = b$ $\quad d=\left|\dfrac{n_1 a_1+n_2 a_2+n_3 a_3-b}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\right|$

zwischen zwei windschiefen Geraden

$g: \vec{x} = \vec{p}+r\cdot\vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q}+s\cdot\vec{v}$ mit $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ $\quad d=\left|\dfrac{(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$

Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Vektorgeometrie

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 115**

Punkte

1 Gegeben sind die Gerade g sowie die Ebene E durch

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ und $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

1.1 Bestimmen Sie den Abstand, den E zum Ursprung hat. 3

1.2 Zeigen Sie, dass sich die Gerade g und die Ebene E in einem Punkt schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes und berechnen Sie den Schnittwinkel. 6

1.3 Die Ebene F verläuft durch den Punkt A(−5|0|1) und ist orthogonal zur Geraden g. Welche besondere Lage hat F im Koordinatensystem? Begründen Sie, dass sich die beiden Ebenen E und F in einer Geraden schneiden. 6

$\overline{15}$

Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Vektorgeometrie

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 116**

Punkte

2 Gegeben sind die Punkte A(2|0|1), B(− 1|2|1), C(1|5|4) und D(3|0|5).

2.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. 3

2.2 Die Punkte A, B, C und D sind Eckpunkte einer Pyramide. Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem. 4
Beschreiben Sie die besondere Lage der Punkte A und D im Koordinatensystem.

2.3 Die Punkte A, B und C liegen in der Ebene E. 8
Geben Sie die Koordinatenform von E an.
Prüfen Sie, ob der Punkt P'(−5,5 | − 8 |14) der Spiegelpunkt von P(6,5 |10 | − 12) bezüglich der Ebene E ist.

$\overline{15}$

Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Vektorgeometrie

Aufgabe 3 **Lösungen Seite 117**

3 Gegeben ist der Punkt Q(2 | 2 | 4) und die Ebenen E_1 und E_2 mit

E_1: $x_1 - x_2 = -10$ und E_2: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

3.1 Berechnen Sie die Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen. Beschreiben Sie die Lage der Ebene E_1 im Raum. 4

3.2 Zeigen Sie: Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich. 7
Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel.

3.3 Ermitteln Sie den Abstand des Punktes Q von der Ebene E_1. 4

15

Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Vektorgeometrie

Aufgabe 4 **Lösungen Seite 118**

4 Gegeben sind die Punkte P(−3|2|9) und Q(2|2|4), die Ebenen E_1 und E_2 mit

E_1: $x_1 - x_2 = -10$ und E_2: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

sowie die Gerade g durch g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

4.1 Zeigen Sie: Der Punkt P liegt nicht auf der Gerade g. 9
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, die durch den Punkt P und die Gerade g festgelegt wird.
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der beiden Ebenen E_2 und F.

4.2 Ein Punkt R erfüllt folgende Bedingungen: 6

- $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ sind gleich lang.
- Der Winkel zwischen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ beträgt 60°.
- Der Punkt R liegt in der Ebene E_1.

Welche Eigenschaft hat das Dreieck PQR?
Überprüfen Sie, ob der Punkt R(− 3|7|4) diese Bedingungen erfüllt.

15

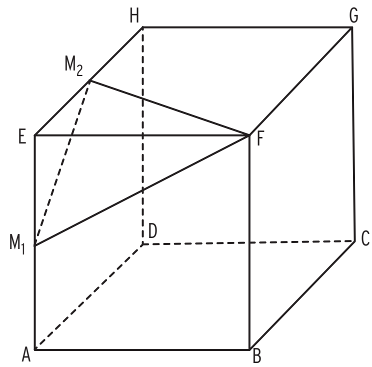
Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Vektorgeometrie

Aufgabe 5 **Lösungen Seite 119**

Punkte

5 Bei einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt. Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abbildung).
Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt.
In einem Koordinatensystem stellen die Punkte A(8 | 0 | 0), C(0 | 8 | 0) und H(0 | 0 | 8) die entsprechenden Ecken des Raumes dar.



5.1 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt. 3

5.2 Zeigen Sie, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segeltuchs. 6
Welchen Abstand hat das Segeltuch von der Ecke E?
(Teilergebnis: S: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$)

5.3 Auf der Diagonalen AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden. Das obere Ende der Stange berührt das Segeltuch. 6
In welchem Punkt befindet sich das untere Ende der Stange?

15

Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Vektorgeometrie

Aufgabe 6 **Lösungen Seite 120**

Punkte

2 Auf einem Sportflugplatz wird ein radargestütztes System erprobt.
Das Radarsystem verwendet ein dreidimensionales Koordinatensystem.
Flugbahnen werden durch Geraden, Warteschleifen werden durch Ebenen modelliert.
Das Gelände des Flugplatzes liegt in der x_1x_2-Ebene.
Alle Orts- und Längenangaben erfolgen in Meter.
Die Mittellinie der 80 m breiten Landebahn hat die Endpunkte
$U(400 \mid -200 \mid 0)$ und $V(1200 \mid 200 \mid 0)$.
Nach Durchfliegen einer Warteschleife in 1200 m Höhe befindet sich ein

Flugzeug im Landeanflug auf der Geraden

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -200 \\ -500 \\ 70 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}.$

2.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, in der die Warteschleife liegt. 2

2.2 In welchem Punkt T setzt das Flugzeug auf dem Boden auf? 5
Weisen Sie nach, dass T auf der Mittellinie der Landebahn liegt.

2.3 Zeigen Sie, dass das Flugzeug die Landebahn so anfliegt, dass es nach dem Aufsetzen auf der Mittellinie ausrollen kann. 6
Wie lang ist die Strecke, die für das Ausrollen zur Verfügung steht?

2.4 Unter welchem Winkel setzt das Flugzeug auf der Landebahn auf? 2

15

Lösungen Übungsaufgaben

Lösungen Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 66**

1.1 Polynomfunktion 4. Grades: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$; $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Bedingungen:		LGS:
Punkt $S(0 \mid 2)$: $f(0) = 2$		$e = 2$
Wendepunkt $W\left(1 \mid \frac{31}{12}\right)$: $f(1) = \frac{31}{12}$		$a + b + c + d + e = \frac{31}{12}$
	$f''(1) = 0$	$12a + 6b + 2c = 0$
$P\left(-3 \mid \frac{5}{4}\right)$	$f(-3) = \frac{5}{4}$	$81a - 27b + 9c - 3d + e = \frac{5}{4}$
Normale mit Steigung $\frac{1}{5}$:	$f'(-3) = -5$	$-108a + 27b - 6c + d = -5$

-5 ist der negative Kehrwert von $\frac{1}{5}$.

1.2.1 $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$; $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$; $f''(x) = x^2 - 1$; $f'''(x) = 2x$

Wendepunkte

Bedingung: $f''(x) = 0$ $\quad x^2 - 1 = 0$ für $x_{1|2} = \pm 1$

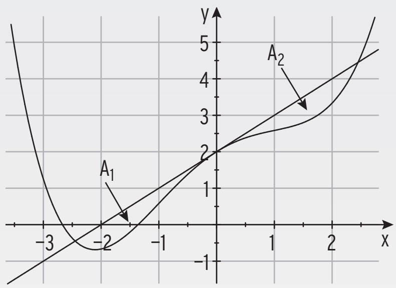
Mit $f'''(\pm 1) \neq 0$ und $f(1) = \frac{31}{12}$: $W_1\left(1 \mid \frac{31}{12}\right)$; $f(-1) = \frac{7}{12}$: $W_2\left(-1 \mid \frac{7}{12}\right)$

Tangente an K im Schnittpunkt mit der y-Achse: $f'(0) = 1$

Geraden durch die Wendepunkte: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{31}{12} - \frac{7}{12}}{1 + 1} = 1$

$\Big\}$ Die Geraden sind parallel.

1.2.2 Gerade: $y = x + 2$ (Tangente an K in $x = 0$)



Schnittstellen: $f(x) = x + 2$

Vereinfachen: $\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = 0$

Ausklammern: $\frac{1}{12}x^2\,(x^2 - 6) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x_{1|2} = 0$; $x_{3|4} = \pm\sqrt{6}$

Fläche zwischen zwei Kurven heißt Integration über die Differenzfunktion.

Inhalt des Flächenstücks im 1. Quadranten:

$$\int_0^{\sqrt{6}} (f(x) - (x + 2))\,dx = \int_0^{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{6}} \approx -0{,}98$$

Flächeninhalt $A = \frac{2}{5}\sqrt{6} \approx 0{,}98$ $(= A_2)$

Hinweise: $A_1 = A_2$; $\int_0^{\sqrt{6}} ((x + 2) - f(x))\,dx = 0{,}98$; Berechnung auch mit $\sqrt{6} = 2{,}45$

Lösungen Analysis Aufgabe 1 **Seite 2/2**

1.3 C: $h(x) = 3\sin(x - 3)$; $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild C entsteht aus dem Schaubild der Funktion k mit $k(x) = \sin(x)$

durch Verschiebung um 3 Einheiten nach rechts ($\sin(x - 3)$)

und Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3.

Für das Schaubild von k gilt: $N_1(0 \mid 0)$; $N_2(\pi \mid 0)$; $H(\frac{\pi}{2} \mid 1)$; $T(\frac{3}{2}\pi \mid -1)$

Daraus ergibt sich für C (siehe oben):

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N^*_1(3 \mid 0)$; $N^*_2(\pi + 3 \mid 0)$

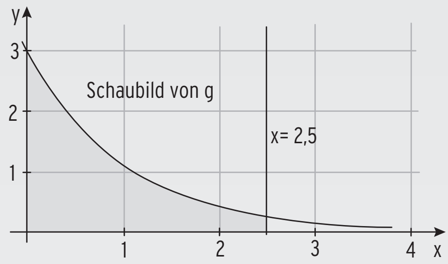
Hochpunkt $H^*(\frac{\pi}{2} + 3 \mid 3)$; Tiefpunkt $T(\frac{3}{2}\pi + 3 \mid -3)$

Lösungen Analysis Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 67**

2.1.1 Flächeninhalt

$$\int_0^{2,5} 3e^{-x}dx = [-3e^{-x}]_0^{2,5} = -3e^{-2,5} + 3$$

Der Flächeninhalt beträgt $3 - 3e^{-2,5}$.

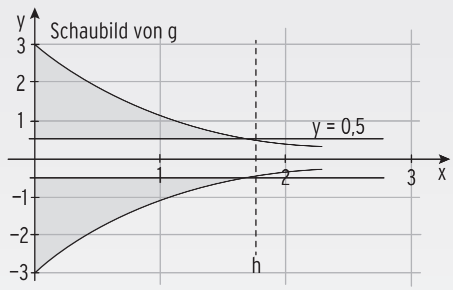


2.1.2 Radius der Bohrung: $r = 0,5$

Schnittstelle, um die Höhe des Zylinders

zu finden: $g(x) = 0,5$ $3e^{-x} = 0,5$

$$h = x = -\ln(\tfrac{1}{6}) \approx 1,792$$



Volumen der Bohrung:

$$V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (0,5)^2 \cdot 1,792$$

$$\approx 1,407$$

Volumen des Restkörpers:

$$V_{Rest} = V_{Rotationskörper} - V_{Zylinder}$$

$$V_{Rest} = \pi \int_0^{1,792} (3e^{-x})^2 dx - V_{Zylinder}$$

$$\int_0^{1,792} (3e^{-x})^2 dx = \int_0^{1,792} (9e^{-2x}) dx = \left[-\frac{9}{2}e^{-2x}\right]_0^{1,792} = -0,125 - (-\frac{9}{2}) = 4,375$$

$$V_{Rest} = \pi \cdot 4,375 - 1,407 = 12,337$$

Lösungen Analysis Aufgabe 2 Seite 2/2

2.2.1 • wahr, da $f'(x) \geq 0$ für alle x mit $-2\pi < x < 2\pi$

Das Schaubild von f′ verläuft nicht unterhalb der x-Achse.

• falsch, z. B. ist an der Stelle x = 0 die Steigung nicht 0, sondern 2 ($f'(0)=2$)

Bemerkung: Ein zur y-Achse symmetrisches Schaubild hat einen Extrempunkt auf der y-Achse.

• wahr, da $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$ (Das Schaubild von f′ verläuft durch den Punkt $P(\frac{\pi}{2} \mid 1)$).

Bemerkung: $f(\frac{\pi}{2})$ ist nicht von Bedeutung und nicht gefragt.

2.2.2 Funktionsterm von f′: $f'(x) = \cos(x) + 1$

(Symmetrie zur y-Achse, Periode 2π, Verschiebung um 1 nach oben)

Aufleiten ergibt: $f(x) = \sin(x) + x + c$

Die Schaubilder von f und f′ schneiden sich auf der y-Achse: $f'(0) = 2 = f(0)$

Einsetzen ergibt: $f(0) = c = 2$ $(\sin(0) = 0)$

Funktionsterm: $f(x) = \sin(x) + x + 2$

Lösungen Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

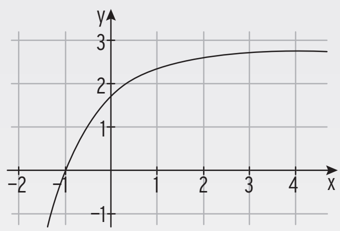
Analysis Aufgabe 3 Seite 1/3 Aufgabe Seite 68

1.1.1 $g(x) = e \cdot x + e^{-x}$; $g'(x) = e - e^{-x}$

Steigung der Normalen n im Schnittpunkt mit der y-Achse: $g'(0) = e - 1 > 0$

$m_n = \frac{-1}{g'(0)} = -\frac{1}{e-1} < 0$

Skizze von g′



(negativer Kehrwert der Tangentensteigung)

g′ ist streng monoton wachsend

für alle $x \in \mathbb{R}$, mit $g'(x) < e$

Daher gibt es genau eine Tangente

mit der Steigung $-\frac{1}{e-1}$

1.1.2 $g(x) = e \cdot x + e^{-x}$; $g'(x) = e - e^{-x}$; $g''(x) = e^{-x} > 0$

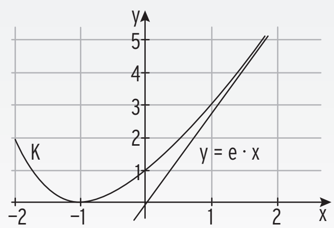
berührt bei x_1 die x-Achse, wenn gilt: $g(x_1) = 0$ und $g'(x_1) = 0$.

$g'(x) = 0$ $e - e^{-x} = 0$

$x = -\ln(e) = -1$

Mit $g(-1) = 0$ gilt: Das Schaubild K berührt die x-Achse im Punkt $B(-1 \mid 0)$.

Alternativ: Der Tiefpunkt von K liegt auf der x-Achse: $T(-1 \mid 0)$.



IV Abiturprüfungen am beruflichen Gymnasium

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Lösungen Seite 153-160**

1 Analysis

Punkte

1.1 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$ an. 2

1.2 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen: 2

$g'(3) = 2$

$g''(3) = 0$

$g'''(3) \neq 0$

Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen?

1.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2 \cdot x} - 4 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat. 3

1.3.2 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt $P(0 \mid 5)$ verläuft. 3

1.4 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = \cos(x);\ x \in \mathbb{R}$.

1.4.1 Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 1$ 3

Bestimmen Sie, ohne Verwendung einer Stammfunktion, zwei

verschiedene Werte für a, sodass gilt:

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 2$$

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

1.4.2 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit 2

$q(x) = -\cos(x + 2);\ x \in \mathbb{R}$

aus dem Schaubild von p hervorgeht.

15

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 1 ohne Hilfsmittel

2 Stochastik — Punkte

2.1 Ein Experiment gelingt in 50 % aller Fälle. 3

Prüfen Sie, ob das Experiment bei viermaliger Durchführung mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einmal gelingt.

2.2 A und B sind beliebige Ereignisse. 4

Die Wahrscheinlichkeit, dass weder das Ereignis A noch das Ereignis B eintritt, beträgt 42%. Die Wahrscheinlichkeit, dass A und das Gegenereignis von B eintritt, beträgt 28%. Die Wahrscheinlichkeit, dass B und das Gegenereignis von A eintritt, beträgt 18%.

Zeigen Sie: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$. $\overline{7}$

3 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

Gegeben sind die Geraden

$$g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

und

$$g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}.$$

3.1 Untersuchen Sie die beiden Geraden auf ihre gegenseitige Lage. 3

3.2 Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_3, die sowohl g_1 als auch g_2 schneidet. 2

3.3 Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_4, die g_1 rechtwinklig schneidet. Geben Sie den Abstand von g_1 zur x_1x_2-Ebene an. 3

$\overline{8}$

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis **Punkte**

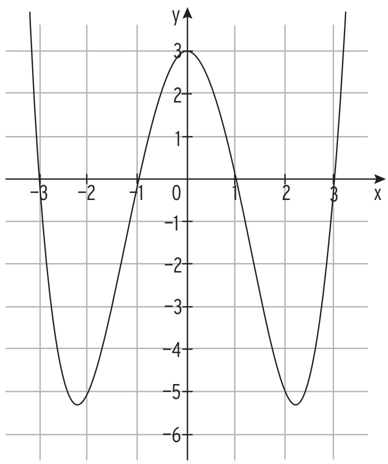
1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + 1;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1.1 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte und Wendepunkte. Zeichnen Sie K. — 8

1.1.2 Das Schaubild K, die Tangente an K an der Stelle $x = -1$ und die y-Achse schließen im zweiten Quadranten eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. — 5

1.1.3 Für einen positiven Wert von m hat das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 0{,}5 \cdot x^4 + x^3 + x^2 + m \cdot x + 2;\ x \in \mathbb{R}$, genau einen gemeinsamen Punkt mit K. Bestimmen Sie diesen Wert von m. — 3

1.2 C ist das Schaubild eine Funktion h. — 4
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion h'.



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen für den abgebildeten Bereich wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Das Schaubild C hat den Tiefpunkt $T(1 \mid h(1))$.

(2) Es gibt Punkte, an denen C eine Normale mit Steigung $\frac{1}{6}$ hat.

20

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

Im Verlauf von etwa 30 Tagen ändert der Mond ständig sein Erscheinungsbild (siehe Abbildung).

Der beleuchtete Anteil der erdzugewandten Seite des Mondes wird modellhaft durch die Funktion A mit

$A(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{15} \cdot t);\ 0 \leq t \leq 30,$

beschrieben. Dabei steht t für die Tage seit Beobachtungsbeginn, beispielsweise ist t = 1 das Ende des ersten Tages.

2.1 Skizzieren Sie das Schaubild von A. 4

Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Frage, die durch Lösen der Gleichung A(t) = 0,95 beantwortet werden kann.

2.2 Ermitteln Sie den durchschnittlichen Anteil, der von Beobachtungs- 4
beginn bis zum Ende des fünfzehnten Tages beleuchtet wird.

2.3 Das Modell A soll nun zu einem Modell B abgeändert werden, sodass 2
der Zeitpunkt t = 0 der Beleuchtung bei Vollmond entspricht.

Bestimmen Sie hierzu einen Wert für c, sodass die Funktion B mit

$B(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{15} \cdot t + c);\ 0 \leq t \leq 30,$

diesen Sachverhalt modelliert.

$\overline{10}$

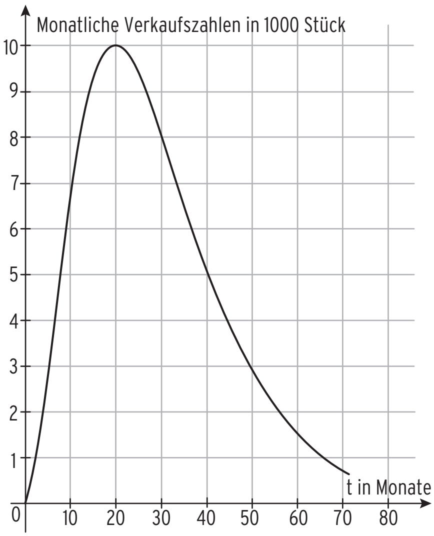
Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

Die folgende Abbildung zeigt die Modellierung eines sogenannte Produktlebenszyklus. Darin sind die monatlichen Verkaufszahlen V eines Produkts (z. B. PKW) in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Zum Zeitpunkt t = 0 beginnt die Einführung des Produkts auf dem Markt. Nach sechs Jahren wird das Produkt vom Markt genommen.

Der Produktlebenszyklus wird lückenlos in vier Phasen unterteilt:



1. Einführungs-und Wachstumsphase
   - Zunahme der Verkaufszahlen
   - Zunahme der momentanen Änderungsrate der Verkaufszahlen
2. Reifephase
   - Zunahme der Verkaufszahlen
   - Verkaufszahlen überschreiten 95% des Maximums nicht
   - keine Zunahme der momentanen Änderungsrate der Verkaufszahlen
3. Sättigungsphase
   - Verkaufszahlen liegen über 95% des Maximums
4. Degenerationsphase
   - beginnt nach der Sättigungsphase

Die Aufgaben 3.1 und 3.2 sollen näherungsweise mit Hilfe der Abbildung gelöst werden.

3.1 Geben Sie für jede der vier Phasen das entsprechende Zeitintervall an. 4

3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der verkauften Produkte in den gesamten sechs Jahren. 2

3.3 Im Folgenden ist V die Funktion der monatlichen Verkaufszahlen in Abhängigkeit von der Zeit t. Formulieren Sie jeweils einen mathematischen Ansatz, um folgende Fragen mithilfe von V beantworten zu können: 4

(1) In welchem Zeitraum liegen die monatlichen Verkaufszahlen über 3000 Stück und weisen keinen Rückgang auf?

(2) In welchen dreimonatigen Zeiträumen liegt die Gesamtverkaufszahl bei 40 000?

10

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

In Schulversuchen wird die Lösung eines chemischen Stoffes mit Salzsäure versetzt. Dadurch zerfällt der Stoff und dessen Konzentration c sinkt im Laufe der Zeit t.

v ist die momentane Änderungsrate der Konzentration c.

Im Folgenden sind c in Mol pro Liter ($\frac{\text{mol}}{\text{l}}$) und die Zeit t in Sekunden (s) angegeben.

4.1 In einem ersten Versuch wird die Konzentration c in Abhängigkeit von t modelliert durch:

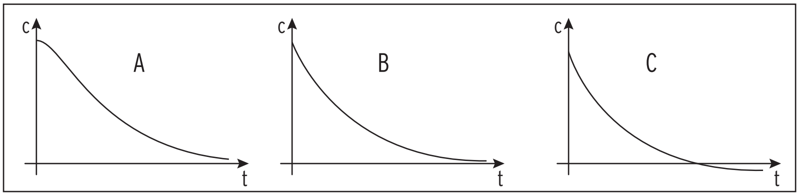
$c(t) = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017 \cdot t}$; $t \geq 0$.

4.1.1 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem nur noch 10 % der Anfangskonzentration vorhanden sind. 4

Geben Sie den Wert von v drei Minuten nach Versuchsbeginn an.

In welcher Einheit wird v gemessen?

4.1.2 Eine der unten stehenden drei Abbildungen zeigt das Schaubild der Funktion c. Entscheiden Sie welche. Erläutern Sie, warum die beiden anderen Schaubilder nicht in Frage kommen. 2



4.2 Unter anderen Bedingungen berechnet sich die momentane Änderungsrate v zum Zeitpunkt t durch $v(t) = -0{,}007 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t}$; $t \geq 0$. 4

Die Anfangskonzentration des Stoffes ist dann $0{,}125\ \frac{\text{mol}}{\text{l}}$.

Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Anfangskonzentration langfristig übrig bleibt.

10

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Stochastik **Punkte**

Beim Strafstoß ("Elfmeter") gibt es drei mögliche Ergebnisse:

(1) Der Schütze erzielt ein Tor.

(2) Der Torhüter wehrt den Ball ab.

(3) Der Schütze trifft die Torbegrenzung oder verfehlt das Tor.

Der Fußballer Tom erzielt beim Strafstoß mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % ein Tor.

1.1 Tom schießt vier Strafstöße. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ergebnisse: 5

A: Er erzielt vier Tore.

B: Er erzielt mindestens drei Tore.

C: Er erzielt genau drei Tore in Folge.

1.2 Ein Freund bietet Tom folgendes Spiel an: 5

"Wenn du ein Tor erzielst, zahle ich dir einen Euro, sollte der Torhüter den Ball abwehren, zahlst du mir zwei Euro. Ansonsten musst du mir 10 Euro geben".

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, wenn man davon ausgeht, dass auf lange Sicht keiner der beiden einen Gewinn macht, das Spiel also fair ist.

1.3 In der Fußballliga wird bei 87 % aller Strafstöße ein Tor erzielt.
10 % der Strafstöße werden vom Torhüter abgewehrt.

1.3.1 Bei einem Strafstoß wird kein Tor erzielt. 2

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Torhüter den Ball abgewehrt hat.

1.3.2 In einer Saison wurden 70 Strafstöße gegeben. 3

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon mindestens 68 Tore erzielt wurden.

$\overline{15}$

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2 An einem Kiosk kann man Rubbellose kaufen. Ein Los besteht aus insgesamt 16 Feldern. Auf jedem Feld steht genau eine Zahl.

Auf acht Feldern steht die Zahl 0, auf vier Feldern die Zahl 1 und auf den restlichen vier Feldern die Zahl 5. Die Zahlen sind zufällig auf die Felder verteilt. Die Felder sind von einer undurchsichtigen Schicht überzogen, sodass die Zahlen erst durch Rubbeln der Felder sichtbar werden.

Der Käufer eines Loses muss genau zwei Felder aufrubbeln (vgl. Abbildung). Das <u>Produkt</u> der Zahlen, die hierdurch sichtbar werden, ist der Betrag in Euro, die der Kioskbetreiber an den Losbesitzer auszahlen muss.

2.1 Eine Frau kauft ein Rubbellos und rubbelt genau zwei Felder frei. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: 3

A: Genau ein frei gerubbeltes Feld zeigt die Zahl 5.

B: Die Frau bekommt mindestens einen Euro ausbezahlt.

2.2 Ein Mann kauft an fünf Tagen in Folge jeweils ein Los. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Mann genau zweimal 25 Euro erhält. 3

2.3 Der Kioskbetreiber kauft die Lose für 20 Cent je Stück ein und verkauft ein Los für 2,50 Euro. Bestimmen Sie die Höhe des Gewinns pro Los, den der Kioskbetreiber im Mittel erwarten kann. 4

2.4 Ein Kioskbetreiber notiert immer am Ende des Tages die Anzahl der an diesem Tag verkauften Rubbellose. Ein Student, der als Aushilfe im Kiosk arbeitet, wertet diese Daten aus: Im Mittel werden 17 Lose pro Tag verkauft, wobei die Standardabweichung 4 beträgt. 5

Der Student macht folgende Annahmen:

(1) Die Anzahl n der Kunden, die den Kiosk aufsuchen, ist an jedem Tag gleich.

(2) Die Kunden kaufen unabhängig voneinander entweder genau ein oder aber kein Rubbellos.

Bestimmen Sie den Wert für p, den der Student unter der Annahme einer Binomialverteilung ermittelt.

Welche Information liefert die Sigma-Regel $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$ dem Studenten in diesem Sachzusammenhang?

$\overline{15}$

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

Punkte

1.1 Gegeben ist die Ebene E: $2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_3 = 12$.

1.1.1 Berechnen Sie den Schnittpunkt von E mit der x_3-Achse. 4

Geben Sie eine Koordinatenform einer Ebene F an, die parallel zu E aber nicht identisch mit E ist.

Geben Sie eine Koordinatenform einer Ebene G an, die nur eine Gerade mit E gemeinsam hat.

1.1.2 Bestimmen Sie a und b so, dass die Ebene E in Normalenform als 2

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = 0$$

geschrieben werden kann.

1.1.3 Prüfen Sie, ob der Punkt P(1 | 0 | 1) zur Ebene E den Abstand $d = \sqrt{13}$ hat. 3

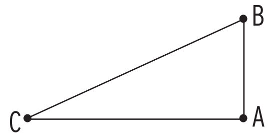
1.2 Gegeben sind die Punkte A(0 | 0 | 2) und B(0 | 0 | 4).

Ein weiterer Punkt C erfüllt folgende Bedingungen:

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

(2) $\frac{1}{2} \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 6$

Skizze:



1.2.1 Interpretieren Sie die Bedingungen (1) und (2) geometrisch 2

1.2.2 Bei Rotation der Fläche ABC um die Achse AB entsteht ein Rotationskörper. Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers. 4

Ein möglicher Punkt C hat die Koordinaten (c | c | 2) mit c > 0.

Bestimmen Sie den Wert von c.

15

Lösungen Hauptprüfung 2016/2017

Teil 1 ohne Hilfsmittel

www.mvurl.de/i4f2

1 Analysis

1.1 Nullstellen von f: $f(x) = 0$ $3 \cdot x^3 - 27 \cdot x = 0$

Ausklammern: $3x(x^2 - 9) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $3x = 0$ oder $x^2 - 9 = 0$

Nullstellen: $x = 0 \vee x = \pm 3$

1.2 $g'(3) = 2$ Die Steigung der Tangente an das Schaubild von g an der Stelle $x = 3$ ist 2.

$g''(3) = 0;\ g'''(3) \neq 0$ Das Schaubild der Funktion g hat einen Wendepunkt an der Stelle $x = 3$.

1.3 $h(x) = e^{2x} - 4 \cdot x;\ h'(x) = 2e^{2x} - 4$

1.3.1 Punkt mit waagrechter Tangente: $h'(x) = 0$ $2e^{2x} - 4 = 0$

$e^{2x} = 2$

Logarithmieren: $2x = \ln(2)$, also $x = \frac{1}{2}\ln(2)$

y-Wert: $h(\frac{1}{2}\ln(2)) = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2}\ln(2) = 2 - 2\ln(2)$

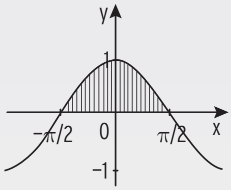
Gesuchter Punkt $(\frac{1}{2}\ln(2) \,|\, 2 - 2\ln(2))$

1.3.2 Stammfunktion von h: $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

durch $P(0 \,|\, 5)$: $H(0) = \frac{1}{2}e^{0} + c = 5$ für $c = 4{,}5$

Gesuchte Stammfunktion: $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot x^2 + 4{,}5;\ x \in \mathbb{R}$

Skizze:



1.4.1 Der Wert des Integrals entspricht dem Inhalt der Fläche, die vom Schaubild von p, der y-Achse und der x-Achse im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ umrandet wird.

$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 2$ für $a = -\frac{\pi}{2}$ (wegen der Achsensymmetrie zur y-Achse)

oder für $a = -\frac{5}{2} \cdot \pi$ oder für $a = -\frac{9}{2} \cdot \pi$

($\int_0^{2\pi} \cos(x)dx = 0$; Integral über eine Periode ergibt den Wert 0)

1.4.2 Das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x + 2);\ x \in \mathbb{R}$

geht aus dem Schaubild von p hervor durch

- Verschiebung des Schaubildes von p um 2 nach links
- Spiegelung an der x-Achse

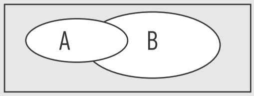
Hauptprüfung 2016/2017 Lösungen

www.mvurl.de/6fux

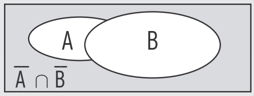
Teil 1 ohne Hilfsmittel Stochastik - Lösungen

2.1 Ein Experiment gelingt in 50 % aller Fälle: p = 0,5
viermalige Durchführung: n = 4; X: Anzahl der Treffer
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}5^4 = 1 - \frac{1}{16} < 1 - \frac{1}{20} = 0{,}95$
Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment bei 4-maliger Durchführung mindestens einmal gelingt, nicht mehr als 95 %.

2.2 $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}42$; $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}28$; $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}18$

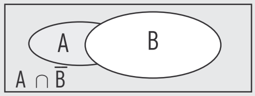


$P(A \cap B) = 1 - (P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)) = 0{,}12$



$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0{,}40 = 40\ \%$
$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0{,}30 = 30\ \%$

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 = P(A \cap B)$



Alternative mit einer Vierfeldertafel:

	B	$\overline{B}$	
A	**0,12**	*0,28*	0,40
$\overline{A}$	*0,18*	*0,42*	0,60
	0,30	0,70	1

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 = P(A \cap B)$

Teil 1 ohne Hilfsmittel Lineare Algebra: Vektorgeometrie - Lösungen

mvurl.de/x335

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R} \qquad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}.$

3.1 Gegenseitige Lage

Gleichsetzen führt auf:

$$\begin{array}{lcll} 1 + 4r = 2 - s & \text{oder} & 4r + s = 1 & (1) \\ 7 + 2r = 1 - s & & 2r + s = -6 & (2) \\ -2 \quad = 5 + 4s & & 4s = -7 & (3) \end{array}$$

(1) + (2) $| \cdot (-2)$ ergibt $-s = 13$ und damit $s = -13$
Aus Gleichung (3) folgt $s = -\frac{7}{4}$ Widerspruch !
Das LGS ist nicht lösbar (Lösungsmenge ist leer). Da außerdem die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind, sind die Geraden windschief zueinander.

3.2 g_3 schneidet g_1 und g_2; g_3 verläuft z.B. durch die beiden Stützpunkte

$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

3.3 g_4 schneidet g_1 rechtwinklig. Die Gerade g_1 liegt in einer Ebene, die parallel zur x_1x_2-Ebene ist ($x_3 = 0$ im Richtungsvektor).

Somit ist der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal zum Richtungsvektor von g_1 .

Hauptprüfung 2016/2017 Lösungen

Teil 1 ohne Hilfsmittel
Lineare Algebra: Vektorgeometrie - Lösungen

3.3 Damit ist z. B. g_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

Der Abstand von g_1 zur x_1x_2-Ebene beträgt 2 LE ($x_3 = -2$ im Stützvektor).

Teil 2 mit Hilfsmittel - Aufgabe 1

www.mvurl.de/2rl4

Analysis

1.1 K: $f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + 1$; $x \in \mathbb{R}$

Ableitungen: $f'(x) = 2x^3 + 3x^2$; $f''(x) = 6x^2 + 6x$; $f'''(x) = 12x + 6$

1.1.1 Extrempunkte

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad 2x^3 + 3x^2 = x^2(2x + 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt ergibt: $\quad x_{1|2} = 0$; $x_3 = -1{,}5$

Mit $f''(-1{,}5) = 4{,}5 > 0$

und $f(-1{,}5) = 0{,}15625$ $\quad T(-1{,}5 \mid 0{,}15625)$

In x = 0 liegt kein Extrempunkt vor, da f′(x) dort das Vorzeichen nicht wechselt ($x_{1|2} = 0$ ist doppelte Nullstelle von f′, siehe auch Wendestelle)

Wendepunkte

Bedingung: $f''(x) = 0$ $\quad 6x^2 + 6x = 6x(x + 1) = 0$

Satz vom Nullprodukt ergibt: $\quad x_1 = 0$; $x_2 = -1$

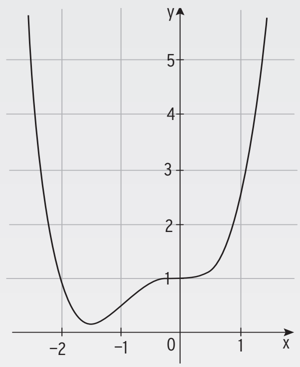
Mit $f'''(0) = 6 \neq 0$

und $f(0) = 1$: $\quad W_1(0 \mid 1)$

Mit $f'''(-1) = -6 \neq 0$

und $f(-1) = 0{,}5$: $W_2(-1 \mid 0{,}5)$

Schaubild K:



1.1.2 Tangente an K an der Stelle x = − 1

$f'(-1) = 1$; $W_2(-1 \mid 0{,}5)$

t: $y = 1 \cdot x + b$

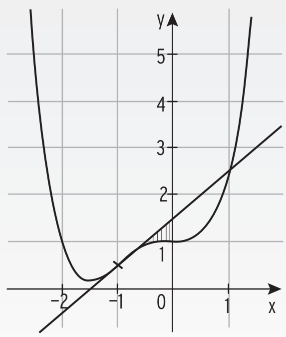
Punktprobe mit W_2 ergibt: $y = x + 1{,}5$

Fläche zwischen K, t in den Grenzen − 1 und 0

$$\int_{-1}^{0} (x + 1{,}5 - f(x))dx = \int_{-1}^{0} (-0{,}5x^4 - x^3 + x + 0{,}5)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0} = 0{,}15$$

Inhalt dieser Fläche A = 0,15 (FE)



Hauptprüfung 2016/2017 Lösungen

Teil 2 mit Hilfsmittel - Aufgabe 1

Analysis

1.1.3 $g(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + x^2 + mx + 2;\ x \in \mathbb{R}$

Gemeinsamer Punkt mit K

durch Gleichsetzen $f(x) = g(x)$ $\qquad 0{,}5x^4 + x^3 + 1 = 0{,}5x^4 + x^3 + x^2 + mx + 2$

$\qquad x^2 + mx + 1 = 0$

Die quadratische Gleichung hat genau eine Lösung, wenn D = 0

Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ oder $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ergibt:

$m^2 - 4 = 0$ oder $\left(\frac{m}{2}\right)^2 - 1 = 0$ $\quad$ wegen $m > 0$: Lösung $m = 2$

Für m= 2 gibt es genau einen gemeinsamen Punkt von K und G.

1.2 (1) falsch

Es gilt zwar $h'(1) = 0$, aber das Vorzeichen von h' wechselt an der Stelle $x = 1$ von + nach –. (Es liegt also ein Hochpunkt vor.)

(2) falsch

Wegen der Orthogonalität von Normale und Tangente müsste es eine Stelle geben, für die gilt: $h'(x) = -6$ (negativer Kehrwert von $\frac{1}{6}$.)

Teil 2 mit Hilfsmittel - Aufgabe 2

Anwendungsorientierte Analysis- Lösung

www.mvurl.de/a62s

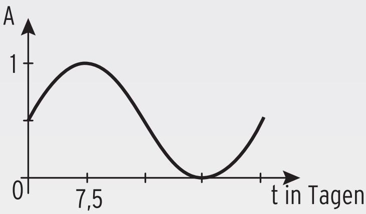
2.1 Schaubild von A

Periode $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} = 30$; Mittellinie: $y = 0{,}5$

$a = 0{,}5$

$A(t) = 0{,}95$ beantwortet z. B die Frage:

Zu welchen Zeitpunkten sind 95% der erdzugewandten Seite des Mondes beleuchtet?



2.2 Durchschnittlicher Anteil (vgl. Mittelwert)

$$m = \frac{1}{15-0}\int_0^{15}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{15}\cdot t\right)\right)dt = \frac{1}{15}\left[\frac{1}{2}t - \frac{15}{2\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{15}\cdot t\right)\right]_0^{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0{,}818\ldots$$

Hinweis: $\cos(\pi) = -1$; $\cos(0) = 1$

Durchschnittlich erscheint ein Anteil von etwa 81,8% beleuchtet.

2.3 Bedingung: $B(0) = 1$ $\qquad B(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{15}\cdot 0 + c\right) = 1$ wenn $\sin(c) = 1$

Mögliche Wahl: $c = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ (oder auch $c = \frac{5}{2}\pi$)

Hauptprüfung 2016/2017 Lösung
Teil 2 mit Hilfsmittel - Aufgabe 3 Anwendungsorientierte Analysis

3.1 Wir lesen Näherungswerte ab (Dabei ist t die Zeit in Monaten.):

Einführungs-und Wachstumsphase:	$0 \le t \le 6$	(bis zur Wendestelle)
Reifephase:	$6 \le t \le 15$	(bis vor die Maximalstelle)
Sättigungsphase:	$15 < t < 24$	(Bereich um die Max-Stelle)
Degenerationsphase:	$24 \le t \le 72$	

3.2 Die Fläche unter der Kurve im Bereich $0 \le t \le 72$ entspricht näherungsweise der gesamten verkauften Menge des Produktes.
Durch das Auswerten der Fläche (z.B. Kästchenzählen) erhält man eine gesamte verkaufte Menge von etwa 360 000 Stück.

3.3 (1) Bestimmen Sie alle t-Werte mit $0 \le t \le 72$, sodass $V(t) > 3000 \wedge V'(t) \ge 0$

(2) Bestimmen Sie alle z-Werte mit $0 \le z \le 69$, sodass $\int_z^{z+3} V(t)dt = 40000$

Hauptprüfung 2016/2017 Lösungen

Teil 2 mit Hilfsmittel - Aufgabe 4 Anwendungsorientierte Analysis

www.mvurl.de/uwc4

4.1.1 $c(t) = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017 \cdot t}$ Anfangskonzentration: $c(0) = 0{,}05$ mol/l

Bedingung: $0{,}05 \cdot e^{-0{,}017 \cdot t} = 0{,}1 \cdot 0{,}05$ oder $e^{-0{,}017 \cdot t} = 0{,}1$

$$-0{,}017t = \ln(0{,}1)$$
$$t = 135{,}446...$$

Nach ca. 135 Sekunden ist nur noch 10 % der Anfangskonzentration vorhanden.

v ist die momentane Änderungsrate (Die Einheit ist $\frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{s}}$.)

$v(t) = c'(t) = -0{,}05 \cdot 0{,}017 \cdot e^{-0{,}017 \cdot t} = -0{,}00085 \cdot e^{-0{,}017 \cdot t}$

$v(180) = -0{,}00003985...$

Der Wert nach 3 Minuten nach Versuchsbeginn ist etwa $-4 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{s}}$.

4.1.2 Schaubild B gehört zu c:
Wegen $c''(t) > 0$ für alle $t \ge 0$, ist das Schaubild von c stets linksgekrümmt.
Damit scheidet Schaubild A aus, da dieses eine Wendepunkt besitzt.
Die Funktion c besitzt keine Nullstellen, c(t) ist stets positiv.
Damit scheidet Schaubild C aus, da dieses die t-Achse schneidet.

4.2 c ist eine Stammfunktion von v: $c(t) = \frac{-0{,}007}{-0{,}07} \cdot e^{-0{,}07 \cdot t} + k = 0{,}1\, e^{-0{,}07 \cdot t} + k$

Aus $c(0) = 0{,}125$ folgt $0{,}1 + k = 0{,}125$, also $k = 0{,}025$

Die Gerade mit $y = 0{,}025$ ist Asymptote des Schaubildes von c.

Aus $\frac{0{,}025}{0{,}125} = 0{,}2 = 20\%$ ergibt sich:

Langfristig bleiben 20 % der Anfangskonzentration übrig.

www.mvurl.de/rhvn

Hauptprüfung 2016/2017 Lösungen

Teil 3 mit Hilfsmittel - Aufgabe 1

www.mvurl.de/nhc2

Stochastik

1.1 Wahrscheinlichkeit für Tor beim Strafstoß: p = 0,80
X: Anzahl der Tore; X ist binomialverteilt mit n = 4 und p = 0,8
$P(A) = P(X = 4) = 0{,}4096$
$P(B) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}1808 = 0{,}8192$
oder auch
$P(B) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}8192$

$P(C) = 2 \cdot (\frac{4}{5})^3 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}2048$

(Die ersten 3 Strafstöße sind Tore oder die letzten 3 Strafstöße sind Tore.)

1.2 T: Tom erzielt ein Tor; G: Der Torhüter wehrt den Ball von Tom ab
V: Tom trifft die Torbegrenzung oder verfehlt das Tor

$P(T) = \frac{4}{5}$; $P(G) = x$; $P(V) = \frac{1}{5} - x$ (Summe = 1)

Aus $\frac{4}{5} \cdot 1 + x \cdot (-2) + (\frac{1}{5} - x) \cdot (-10) = 0$ (Spiel fair, heißt E(X) = 0)

folgt $x = \frac{3}{20} = 0{,}15$
15% der von Tom geschossenen Strafstöße werden vom Torhüter abgewehrt.

1.3 TN: Schütze erzielt kein Tor mit $P(TN) = 1 - 0{,}87 = 0{,}13$
TW: Torhüter wehrt den Ball ab mit $P(TW) = 10\% = 0{,}1$
Hinweis: $P(TN \cap TW) = P(TW)$

1.3.1 $P_{TN}(TW) = \frac{P(TN \cap TW)}{P(TN)} = \frac{0{,}1}{0{,}13} = 0{,}769...$

Etwa 77% der Strafstöße, bei denen kein Tor erzielt wurde, werden vom Torhüter abgewehrt.

1.3.2 X: Anzahl der erzielten Tore; X ist binomialverteilt mit n = 70 und p = 0,87
$P(X \geq 68) = P(X = 68) + P(X = 69) + P(X = 70)$
oder
$P(X \geq 68) = 1 - P(X \leq 67) = 0{,}003817...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 68 Tore erzielt wurden, beträgt etwa 0,4%.

Hauptprüfung 2016/2017 Lösungen
Teil 3 mit Hilfsmittel - Aufgabe 2
Stochastik

www.mvurl.de/flyy

2.1 $P(\text{5 im 1. Zug}) = \frac{4}{16}$

$P(A) = 2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{12}{15} = \frac{6}{15} = 0{,}4$

Mindestens 1 € ausbezahlt bedeutet, sie rubbelt nur Zahlen 1 oder 5 frei
$P(B) = \frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{30} = 0{,}233$

2.2 25 € ausbezahlt bedeutet, er rubbelt zweimal die Zahl 5 frei
mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$
C: Der Mann erhält 25 € mit genau zwei von 5 Rubbellosen.
X: Anzahl der 25 € Treffer unter 5 Rubbellosen;
X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = \frac{1}{20}$
$P(C) = P(X = 2) = 0{,}02143$
Der Mann erhält mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 2% genau zweimal 25 €.

2.3 X: Auszahlung in € an den Losbesitzer
$P(X = 1) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$ (11 wird gerubbelt)

$P(X = 5) = 2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$ (15 oder 51 wird gerubbelt)

$P(X = 25) = \frac{1}{20}$ (55 wird gerubbelt)

Durchschnittliche Auszahlung $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{20} + 5 \cdot \frac{2}{15} + 25 \cdot \frac{1}{20} = 1{,}966...$

Erwarteter Gewinn pro Los: $2{,}50 - 0{,}20 - 1{,}966... = \frac{1}{3}$

Pro verkauftem Los kann der Kioskbetreiber mit etwa 0,33 € Gewinn rechnen.

2.4 X: Anzahl der Kunden pro Tag, die ein Los kaufen; X ist binomialverteilt
$E(x) = \mu = n \cdot p = 17$
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{17 \cdot (1 - p)} = 4$
Quadrieren ergibt ($p > 0$): $17 \cdot (1 - p) = 16$ und damit $p = \frac{1}{17}$
Einsetzen in $n \cdot p = 17$ ergibt $n = 289$
Damit erhält der Student für die Anzahl der Kunden, die täglich den Kiosk aufsuchen, den Wert $n = 289$.
$\mu - \sigma = 13$; $\mu + \sigma = 21$; $P(13 \leq X \leq 21) = 68{,}3\%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 68,3% kaufen täglich mehr als 12 und weniger als 22 Kunden ein Los.

Hauptprüfung 2016/2017 Lösungen
Teil 4 mit Hilfsmittel - Aufgabe 1
Lineare Algebra: Vektorgeometrie - Lösung

mvurl.de/r2ok

1.1.1 Für Punkte auf der x_3-Achse gilt: $x_1 = x_2 = 0$
Einsetzen in die Gleichung von E: $-3x_3 = 12$ ergibt $x_3 = -4$
und damit den Schnittpunkt von E mit der x_3-Achse: $S(0|\,0|\,-4)$

Mögliche Ebenen F und G:
F: $2x_1 - 3x_3 = 13$ ist parallel zu E
G: $2x_1 - 4x_3 = 12$ hat eine Gerade mit E gemeinsam
($x_3 = 0$; $x_1 = 6$; $x_2 = r$):

1.1.2 E: $2x_1 - 3x_3 = 12$ Normalenvektor zu E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$

also b = − 9 und damit E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = 0$

Wegen $S(0|\,0|\,-4)$ ist $a = -4$
oder ausmultiplizieren ergibt: $6x_1 - 9x_3 = -9a \Leftrightarrow 2x_1 - 3x_3 = -3a$
Vergleich ergibt $-3a = 12$, also $a = -4$.

1.1.3 E: $2x_1 - 3x_3 - 12 = 0$
Abstand von $P(1\,|\,0\,|\,1)$ von E: $d = \left|\frac{2\cdot 1 - 3\cdot 1 - 12}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\frac{-13}{\sqrt{13}}\right| = \sqrt{13}$

1.2.1 (1) Die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind orthogonal
(stehen senkrecht aufeinander).

(2) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt 6.

1.2.2 $|\overrightarrow{AB}| = 2 = h$; $|\overrightarrow{AC}| = r = 6$ wegen $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = 6$

Volumen des Rotationskörpers: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 2 = 24\pi$

Bestimmung von c

$|\overrightarrow{AC}| = 6$ und $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$

Bedingungen: $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{c^2 + c^2} = 6$

$\sqrt{2c^2} = 6 \Rightarrow c^2 = 18 \Rightarrow c = \sqrt{18}$ $(c > 0)$

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel Aufgabe 1 **Lösungen Seite 237-249**

Analysis **Punkte**

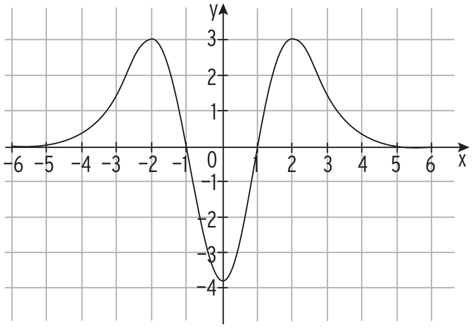
Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K_f.

1.1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie K_f ohne weitere Rechnung. 4

1.1.2 Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punktes, in dem K_f die Steigung $\frac{3}{2}$ hat. 2

1.2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds der Funktion s. 5



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Es gilt: $s''(4) < 0$.

(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.

(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x)\,dx$ ist größer als 0.

1.3 Die Funktion d ist für $x > 0$ gegeben durch $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$ und D ist eine Stammfunktion von d. 4

Zeigen Sie:

(1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.

(2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D.

15

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel Aufgabe 2

Stochastik **Punkte**

2.1 Eine Fußballmannschaft gewinnt jedes ihrer Spiele mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

2.1.1 Das Ereignis A hat die folgende Wahrscheinlichkeit: 2

$P(A) = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$

Geben Sie eine Formulierung für das Ereignis A im Sachzusammenhang an.

2.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft von vier Spielen genau zwei Spiele gewinnt und diese aufeinander folgen. 2

2.2 Eine andere Mannschaft wird von ihren Misserfolgen demotiviert. 4

Die Mannschaft gewinnt das erste Spiel einer Wahrscheinlichkeit p.

Gewinnt sie das erste Spiel nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit dann das zweite Spiel zu gewinnen $\frac{1}{2}$p.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mindestens eines der beiden Spiele gewinnt, beträgt $\frac{4}{9}$.

Begründen Sie, dass durch Lösen der Gleichung

$1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$ die Wahrscheinlichkeit p ermittelt werden kann.

8

Teil 1 ohne Hilfsmittel Aufgabe 2

Stochastik **Punkte**

2 In einer Urne befinden sich zunächst neun Kugeln.

Vier Kugeln haben die Farbe blau, zwei sind weiß und drei sind grün.

2.1 Zwei Kugeln werden nacheinander aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: 5

A: Die beiden gezogenen Kugeln sind weiß.

B: Unter den beiden gezogenen Kugeln befindet sich mindestens eine weiße Kugel.

C: Eine der beiden gezogenen Kugeln ist weiß und die andere blau.

2.2 Es wird nun eine unbekannte Anzahl x von grünen Kugeln der Urne hinzugefügt, sodass bei zweimaligem Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit zwei grüne Kugeln zu ziehen genau 50 % ist. 3

Ermitteln Sie eine Gleichung mit der x berechnet werden kann.

8

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3 Die Punkte A(5 | 1 | 0), B, C und D liegen in einer gemeinsamen Ebene und es gilt $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt von $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ liegt in der Mitte von A und C.

3.1 Begründen Sie, dass $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ einen rechten Winkel einschließen und den gleichen Betrag haben. 3

3.2 Fertigen Sie eine geeignete zweidimensionale Skizze an, die zeigt, dass das Viereck ABCD kein Quadrat sein muss. 2

3.3 Ermitteln Sie für den Fall, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist, die Koordinaten der Eckpunkte B und D. 2

$\overline{7}$

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Berechnen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems: 3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \\ -x_1 + 2x_2 &= -3 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

3.2 Gegeben sind die Geraden g und h mit

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

3.2.1 Zeigen Sie, dass g und h parallel aber nicht identisch sind. 2

3.2.2 Bestimmen Sie einen Punkt P, der von g und h den gleichen Abstand hat. 2

$\overline{7}$

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis **Punkte**

1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -e^{2x} + 4e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1 K besitzt mit den Koordinatenachsen jeweils genau einen Schnittpunkt. Überprüfen Sie, ob dies die Punkte $S_y(0 \mid 3)$ und $N(\ln(4) \mid 0)$ sind. 2

1.2 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung f′ von f gilt: $f'(x) = 2e^x \cdot (2 - e^x)$. Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunktes von K. 4

1.3 Zeichnen Sie K für $-5 \leq x \leq 1{,}5$. 3

1.4 Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: 3
„Der Inhalt der Fläche, die K mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten einschließt, ist das Doppelte des Mittelwertes von f auf dem Intervall $[0; \ln(4)]$."

1.5 Die Gerade mit der Gleichung $y = c$ schneidet K in zwei Punkten $P(x_P \mid c)$ und $Q(x_Q \mid c)$ mit $x_P < 0$ und $x_Q > 0$.

1.5.1 Geben Sie alle möglichen Werte für c an. 2

1.5.2 Es gilt nun $c = 1$. 4
Zeigen Sie, dass dann die y-Achse die Strecke PQ halbiert.

1.6 Untersuchen Sie, ob das Schaubild der auf IR definierten Funktion g mit $g(x) = f(x) + f(-x)$ symmetrisch ist. 2
Geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an.

20

Hauptprüfung 2020/2021

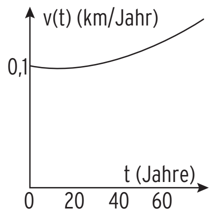
Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

2 Bei der Untersuchung einer Gletscherspalte eines Alpengletschers wurden im Jahr 2012 im Gletschereis nur wenige Zentimeter über dem Grund des Gletschers Ausrüstungsteile gefunden, die im Jahr 1950 von Bergsteigern im Gletschereis zurückgelassen wurden.
Im Laufe der Zeit hatten sich die Ausrüstungsteile mit dem Gletscher talwärts bis zur Fundstelle bewegt. Durch eine dort in den Gesteinsboden verankerte Eisenstange wurde der Fundort der Ausrüstungsteile markiert. Der Ort, an dem der Gletscher talwärts endet, lag 2012 noch 7 Kilometer (km) vom Fundort der Ausrüstungsteile entfernt. Aufgrund der Klimaerwärmung der letzten Jahrzehnte zieht sich das Gletscherende zurück. Es bewegt sich um durchschnittlich 200 Meter (m) pro Jahr in Richtung des Fundorts.

2.1 Betrachtet wird der Abstand des Gletscherendes zum Fundort der Ausrüstung. Begründen Sie, dass dieser Abstand bezogen auf das Jahr 2012 durch die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}2 \cdot x + 7$ beschrieben werden kann. Geben Sie die Bedeutung von x im Sachkontext an. 2

2.2 Die Funktion v mit
$v(t) = 7{,}56 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 - 2{,}27 \cdot 10^{-4} \cdot t + 0{,}11;\ \ t \geq 0$
modelliert die Geschwindigkeit (in km pro Jahr) des Gletschers bei seiner Bewegung talwärts.
Hier entspricht t = 0 dem Jahr 1950.
Das Schaubild von v ist in der Abbildung dargestellt.



2.2.1 Bestimmen Sie v(71) und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext. 2

2.2.2 Prüfen Sie, ob mit Hilfe von v belegbar ist, dass der Gletscher sich von 1950 bis 2021 um durchschnittlich etwa 115 m pro Jahr talwärts bewegt hat. 3

2.2.3 Bei der Bergung der Ausrüstungsteile wurden kleine Ausrüstungsteile übersehen, sodass diese im Eis zurückblieben. 3
Formulieren Sie eine Frage im Sachkontext, die durch Lösen der Gleichung

$$\int_{62}^{62+x} v(t)\,dt = -0{,}2 \cdot x + 7 \quad \text{mit } x > 0 \text{ beantwortet werden kann.}$$

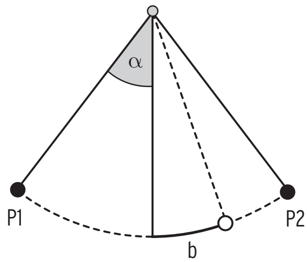
10

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

3 Ein Fadenpendel besteht aus einem Faden, an dessen unterem Ende eine Kugel befestigt ist. Das Pendel wird in Position P1 gebracht und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Anschließend führt es eine Schwingung aus.



Die Geschwindigkeit der Kugel wird modelliert durch v mit $v(t) = 0{,}5 \cdot \sin(5t)\ ;\ t \geq 0$.
Dabei ist t die Zeit in Sekunden (s) und v(t) wird in Meter pro Sekunde $\left(\frac{m}{s}\right)$ angegeben.

3.1 Bestimmen Sie die Zeit, die vom Zeitpunkt des Loslassens an vergeht, bis die Kugel zum ersten Mal den Umkehrpunkt P2 erreicht. 2

3.2 Die Beschleunigung der Kugel ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit. Bestimmen Sie die momentane Beschleunigung der Kugel 0,2 Sekunden nach dem Loslassen sowie die durchschnittliche Beschleunigung innerhalb der ersten 0,2 Sekunden. 3

3.3 Die Funktion b mit $b(t) = -0{,}1 \cdot \cos(5t);\ \ t \geq 0$ modelliert die Auslenkung des Pendels, wobei b(t) die „Länge" des Bogens vom tiefsten Punkt bis zur Position der Kugel zum Zeitpunkt t ist (sieheAbbildung).
Negative Werte von b(t) bedeuten dabei Auslenkungen nach links (in Richtung von P1), positive Werte bedeuten Auslenkungen nach rechts.

3.3.1 Zeigen Sie, wie man ausgehend von v auf die Funktion b gelangt. 3

3.3.2 Die Länge des Fadenpendels ist 0,4 m. 2
Berechnen Sie den Auslenkungswinkel α zum Zeitpunkt des Loslassens (siehe Abbildung).

$\overline{10}$

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

4 Marie und Pierre Curie entdeckten 1898 gemeinsam das radioaktive Isotop Radium 226. Für dieses ist bekannt, dass die Halbwertszeit etwa 1600 Jahre beträgt. Die Halbwertszeit gibt an, wie viel Zeit vergeht, bis von einer gegebenen Menge eines zerfallenden Stoffes nur noch die Hälfte vorhanden ist.
Die Kerne von Radium zerfallen und geben dabei die sogenannte α-Strahlung ab. Der Zerfall der Radiumkerne kann mit der Funktion f mit $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$; $t \geq 0$, beschrieben werden. Dabei sind $c > 0$ und $k < 0$ geeignete Konstanten und f(t) ist die zum Zeitpunkt t in Jahren nach Beobachtungsbeginn $t = 0$ vorhandene Masse von Radium 226 in Gramm (g).

4.1 Ermitteln Sie den Wert von k sowie die Masse einer Probe zu Beobachtungsbeginn, falls 20 Jahre danach noch 99,14 g Radium vorhanden sind. 3

4.2 Erläutern Sie im Sachkontext, welcher Zeitpunkt t mit dem Ansatz 2
$\frac{f(0) - f(t)}{f(0)} = 0{,}9$
bestimmt werden kann.

4.3 Es wird nun eine andere Probe betrachtet. Für die Modellierung von deren Zerfall gelten: $c = 150$ und $k = -4{,}3332 \cdot 10^{-4}$.

4.3.1 Geben Sie den Zeitpunkt an, an dem am meisten Radium zerfällt und bestimmen Sie zu diesem Zeitpunkt die Änderungsrate von f. 2

4.3.2 Beweisen Sie, dass die folgende Aussage wahr ist: 3
„Zu jedem beliebigen Zeitpunkt t gilt: Der Anteil, der a Jahre später von der Masse f(t) noch vorhanden ist, hängt nur von a ab."

10

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Stochastik **Punkte**

1 Eine Firma stellt Holzspielzeuge her. Abbildung 1 illustriert die Funktionsweise eines sogenannten Galton-Bretts. Bei diesem Spielzeug werden Kugeln von oben in einen Schacht gegeben und diese prallen dann auf runde Stifte, die sie jeweils entweder links oder rechts passieren, bevor sie in einem der unteren Fächer aufgefangen werden. Das in Abbildung 1 dargestellte Galton-Brett hat die Länge vier, da jede Kugel an vier Stiften abprallt, bevor sie in einem der fünf Fächer landet. Ist ein ideales Galton-Brett waagerecht aufgestellt, so prallt jede Kugel von jedem Stift mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 nach jeweils einer der beiden Seite ab.

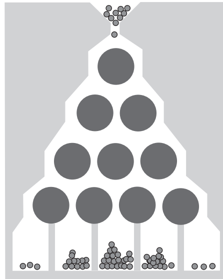


Abbildung 1

1.1 Eine Kugel wird in das Galton-Brett gegeben.

1.1.1 Erläutern Sie, warum der Pfad der Kugel durch eine Bernoulli-Kette beschrieben werden kann. Definieren Sie in diesem Zusammenhang eine binomialverteilte Zufallsvariable X und geben Sie die möglichen Werte von X für ein Galton-Brett der Länge vier an. 4

1.1.2 Berechnen Sie für ein Galton-Brett der Länge vier jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: 4

A: Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach.

B: Die Kugel landet nicht in einem der beiden äußeren Fächer.

1.2 Erfahrungsgemäß fallen 5 % der produzierten Galton-Bretter bei der Qualitätskontrolle durch. Diese werden als mangelhaft bezeichnet. Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: „Mindestens 46 Galton-Bretter müssen überprüft werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens ein mangelhaftes Brett zu finden. 3

1.3 Jemand stellt ein Galton-Brett der Länge acht schräg auf (vgl. Abbildung 2). Die Schrägstellung ist so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel im mittleren Fach landet, den Wert 0,1 hat. Eine Kugel wird in das Galton-Brett gegeben. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel an den Stiften nach links abprallt. 4

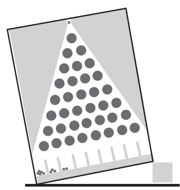


Abbildung 2

15

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2 Bei einer Wahl betrug die Wahlbeteiligung 76 %.

2.1 Nach der Wahl werden zufällig Wahlberechtigte befragt, ob sie an der Wahl teilgenommen haben. 5
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Von fünf Wahlberechtigten haben nur die ersten beiden gewählt.
B: Von vier Wahlberechtigten haben höchstens drei gewählt.
C: Von 20 Wahlberechtigten haben mehr als 11 aber weniger als 18 gewählt.

2.2 Insgesamt wurden 136 Wahlberechtigte zufällig befragt. 3
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Anzahl der Wähler genau dreimal so groß wie die Anzahl der Nichtwähler ist.

2.3 Es haben 29 % der Wähler per Briefwahl abgestimmt. Die Partei M erlangte 26 % aller Wählerstimmen. 4
Lediglich 8 % der Briefwähler wählten die Partei M.

2.3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Wähler der Partei M nicht per Briefwahl abgestimmt hat. 3

2.3.2 Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie:
„Würde sich der Anteil der Wähler von Partei M unter den Briefwählern erhöhen, während der Anteil der Briefwähler sowie der Anteil der Wählerstimmen für Partei M mit 29 %, bzw. 26 % gleich blieben, so könnte der Anteil der Wähler von Partei M unter den Wählern, die nicht per Briefwahl abgestimmt hätten, genau 30 % betragen."

15

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

1 In einem Museum gibt es einen quaderförmigen Raum, in dem ein Kunstwerk in Pyramidenform ausgestellt wird. Die Seitenflächen der Pyramide sind undurchsichtig. Im Modell liegt der Boden des Raums in einem Teil der x_1x_2-Ebene mit $x_2 \geq 0$.
Die quadratische Grundfläche ABCD der Pyramide hat die Eckpunkte $A(0 \mid 4 \mid 0)$, $B(4 \mid 4 \mid 0)$, $C(4 \mid 8 \mid 0)$ und D. Die Spitze S der Pyramide liegt vier Längeneinheiten senkrecht über dem Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Grundfläche.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter (m).

1.1 Begründen Sie, dass die Spitze der Pyramide im Punkt $S(2 \mid 6 \mid 4)$ liegt. 2

1.2 Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem ein. 3

1.3 Die Seitenflächen der Pyramide werden mit einem Material beschichtet, das 1500 Euro pro Quadratmeter kostet. 2
Ermitteln Sie die Kosten dieser Beschichtung.

1.4 Der Raum wird nach einer Seite hin durch eine fensterlose Wand begrenzt, die Teil der x_1x_3-Ebene mit $x_3 \geq 0$ ist. Die gegenüberliegende Wand besteht aus Glas. Vormittags tritt Sonnenlicht durch die Glaswand ein. Das Sonnenlicht verläuft in Richtung des Vektors 4

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

und verursacht einen Schatten der gesamten Pyramide.
Untersuchen Sie, ob dieser Schatten auf die fensterlose Wand trifft.

1.5 Im Punkt $K(0 \mid 9 \mid 3)$ ist eine Überwachungskamera angebracht, wobei die Pyramide die Überwachung des gesamten Raumes verhindert. 4
Ein punktförmiges Objekt bewegt sich vom Punkt $P(5 \mid 4 \mid 2)$ aus in Richtung des Vektors $\overrightarrow{AC}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, an dem das Objekt von der Kamera erstmalig erfasst werden kann.

$\overline{15}$

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

2 Ein Flugzeug befindet sich im Landeanflug. Dieser wird modelliert durch

g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$; $0 \leq t \leq 15$.

Hierbei ist t die Zeit in Minuten (t = 0 ist der Beginn des Landeanflugs) und die Längeneinheit ist Kilometer (km).

Die x_3 -Koordinate ist die Flughöhe über dem Meeresspiegel.

2.1 Die Spitze des Flughafenturms befindet sich in S(11 | 14 | 0,13). 3

Berechnen Sie, wie weit das Flugzeug eine Minute nach Beginn des Landeanflugs von der Spitze des Flughafenturms entfernt ist.

2.2 In einem Flugraum ist ständig mit anderen Flugzeugen zu rechnen. 3

Dieser Flugraum wird zylinderförmig modelliert, wobei der Radius 0,8 km ist und die Rotationsachse durch die Gerade h mit

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -40 \\ -40 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

beschrieben wird. Untersuchen Sie, ob das Flugzeug während seines Landeanflugs in diesen Flugraum eintritt.

2.3 Die horizontale Landebahn befindet sich auf 100 Meter Höhe über dem Meeresspiegel. Ermitteln Sie den Landepunkt und den Winkel, unter dem das Flugzeug auf der Landebahn aufsetzt. 3

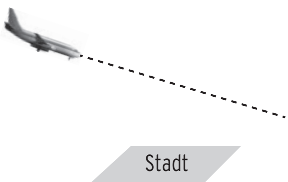
2.4 Vor der Landung wurde eine Stadt überflogen.

Diese Stadt wird modelliert durch das Rechteck ABCD. Es sind A(0 | 0 | 0,2) und C(11 | 4 | 0,2). Das Rechteck liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 0{,}2$ und seine Seiten sind parallel zur x_1-Achse bzw. x_2-Achse.

2.4.1 Geben Sie die Koordinaten der Punkte B und D an. 2

2.4.2 Aus Sicherheitsgründen muss das Flugzeug stets mindestens 300 m über der Stadt fliegen (siehe Abbildung). 4

Prüfen Sie, ob das Flugzeug diese Mindesthöhe über der Stadt einhält.



15

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

www.mvurl.de/exqd

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis

1.1.1 Nullstellen von f: f(x) = 0 $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0$

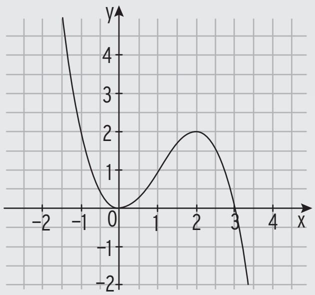
Ausklammern: $x^2 \cdot (x - 3) = 0$

Nullprodukt: $x^2 = 0 \vee x - 3 = 0$

Lösungen (doppelt; einfach): $x_{1|2} = 0;\ x_3 = 3$

Skizze des Schaubilds von f:

(doppelte Nullstelle = Berührstelle)



1.1.2 Ableitungsfunktion von f:

$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$

Bedingung für die x-Koordinate: $f'(x) = \frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}x^2 + 3x = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot \frac{2}{3}$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

Binomische Formel: $(x - 1)^2 = 0$

(doppelte) Lösung: $x = 1$

1.2 (1) Die Aussage ist falsch. Das Schaubild von s ist in einer Umgebung von $x = 4$ linksgekrümmt ($s''(4)$ ist also größer Null).

(2) Die Aussage ist wahr. Für $0 < x < 2$ besitzt das Schaubild von s einen Wendepunkt mit Wechsel von einer Links- zu einer Rechtskrümmung. Somit hat die das Schaubild der Ableitungsfunktion s′ dort einen Hochpunkt. (Die Steigungswerte von s nehmen zu bis $x = 1$, danach fallen sie.)

(3) Die Aussage ist wahr. Über [0; 4] ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von s und der x-Achse oberhalb der x-Achse größer als der Inhalt der Fläche unterhalb.

1.3 (1) $d(x) = D'(x)$; d ist die Ableitungsfunktion von D.

Für alle $x > 0$ gilt $d(x) > 0$, da beiden Summanden im Funktionsterm von d quadratisch und damit positiv sind. Somit ist D für $x > 0$ monoton wachsend.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1**

1.3 (2) $D'(x) = d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2 = x^{-2} + x^2$; $D''(x) = d'(x) = -2 \cdot x^{-3} + 2x = -\frac{2}{x^3} + 2x$

Bedingung für die Wendestelle von D: $d'(x) = 0$

$$-\frac{2}{x^3} + 2x = 0 \quad | \cdot x^3$$
$$-2 + 2x^4 = 0$$
$$x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$x = 1$ ist die einzige positive Lösung. Somit liegt hier die einzige positive Wendestelle von D vor.

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

2.1.1 $p = \frac{2}{3}$; Ereignis A: Die Mannschaft gewinnt genau 9 von 10 Spielen.

2.1.2 Wahrscheinlichkeit: $P = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$.

Hinweis: Da die Mannschaft das erste und zweite oder das zweite und dritte oder das dritte und vierte Spiel gewinnen kann, gibt es 3 Möglichkeiten, die jeweils gleich wahrscheinlich sind.

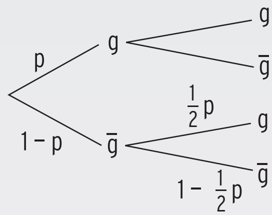
2.2 Vorgehen mithilfe des Gegenereignisses: Die Mannschaft gewinnt beide Spiele nicht.

www.mvurl.de/9e1z

$P(\text{gewinnt mind. ein Spiel}) = 1 - P(\overline{g}\,\overline{g}) = 1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right)$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt laut Aufgabenstellung $\frac{4}{9}$, somit gilt:

$1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$



Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

2 b: blaue Kugeln (4 von 9); w: weiße Kugeln (2 von 9); g: grüne (3 von 9)

2.1 Ziehen ohne Zurücklegen; $P(A) = P(ww) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36}$

$P(B) = P(ww) + P(w\overline{w}) + P(\overline{w}w) = \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{5}{12}$

oder über das Gegenereignis: $P(B) = 1 - P(\overline{w}\,\overline{w}) = 1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{5}{12}$

$P(C) = P(wb) + P(bw) = 2 \cdot P(wb) = 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{2}{9}$

www.mvurl.de/evid

2.2 x gibt die Anzahl der hinzugefügten grünen Kugeln an.

Nachdem x grüne Kugeln hinzugefügt wurden, sind (x + 3) grüne Kugeln und (x + 9) Kugeln insgesamt in der Urne.

Bedingung für x: $P(gg) = \frac{x + 3}{x + 9} \cdot \frac{x + 2}{x + 8} = 0{,}5$

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel Aufgabe 3 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Nachweis für rechten Winkel (Orthogonalität) über das Skalarprodukt:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = (-6) \cdot (-2) + 6 \cdot (-2) + 0 \cdot 8 = 0$$

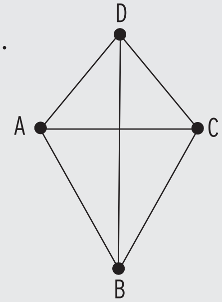
www.mvurl.de/8s33

Nachweis für gleiche Beträge:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{72}; \quad \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 8^2} = \sqrt{72}$$

3.2 Skizze Viereck ABCD

Hinweis: Die Diagnonale $\overline{BD}$ muss nicht halbiert werden.



3.3 Ist das Viereck ABCD ein Quadrat, so halbieren sich die (zueinander orthogonalen) Diagonalen gegenseitig.

Berechnung der Koordinaten von B und D:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow B(3 \mid 5 \mid -4)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow D(1 \mid 3 \mid 4)$$

Teil 1 ohne Hilfsmittel Aufgabe 3 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)$

3\. Zeile: $5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3$

Einsetzen in 2. Zeile $4x_2 - x_3 = -7$: $4x_2 - 3 = -7 \Rightarrow x_2 = -1$.

Einsetzen in 1. Zeile $x_1 + 2x_2 - x_3 = -4$: $x_1 + 2\cdot(-1) - 3 = -4 \Rightarrow x_1 = 1$.

Lösungsmenge: $L = \{(1 \mid -1 \mid 3)\}$

3.2.1 Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander (kollinear):

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Daher sind g und h parallel oder identisch.

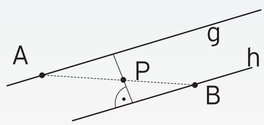
Durch Punktprobe wird untersucht, ob der Aufpunkt $Q(1 \mid -1 \mid 2)$ von g auf h liegt: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Zeile 1: $1 = 2 - s \Rightarrow s = 1$

Zeile 2: $-1 = -2s \Rightarrow s = \frac{1}{2}$ Widerspruch

Q liegt nicht auf h. Daher sind g und h nicht identisch.

3.2.2 A ist ein Punkt auf g, B ist ein Punkt auf h, so hat der Punkt P mit $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ den gleichen Abstand von g und h.



Z.B.: Aufpunkte $A(1 \mid -1 \mid 2)$; $B(2 \mid 0 \mid 1)$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-(-1) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Rightarrow P(1,5 \mid -0,5 \mid 1,5)$$

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis **Punkte**

K: $f(x) = -e^{2x} + 4e^x$

1.1 Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = -e^0 + 4e^0 = -1 + 4 = 3 \Rightarrow S_y(0|\,3)$

Schnittpunkt mit x-Achse:

$f(\ln(4)) = -e^{2\cdot\ln(4)} + 4\cdot e^{\ln(4)} = -(e^{\ln(4)})^2 + 4\cdot 4 = -4^2 + 16 = 0 \Rightarrow N(\ln(4)|\,0)$

Hinweis: $e^{\ln(4)} = 4$

1.2 Ableitung: $f'(x) = -2e^{2x} + 4e^x = 2e^x\cdot(2 - e^x)$ (Kettenregel und Ausklammern)

$f''(x) = -4e^{2x} + 4e^x$

Bedingung für Extremstelle: $f'(x) = 0$ $\quad 2e^x \cdot (2 - e^x) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $\quad 2e^x = 0 \vee 2 - e^x = 0 \Rightarrow 2 = e^x$

Lösung: $(e^x \neq 0)$ $\quad x = \ln(2)$

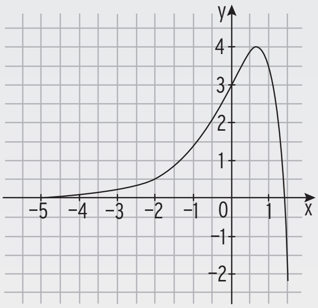
Mit $f''(\ln(2)) = -4e^{2\cdot\ln(2)} + 4\cdot e^{\ln(2)} = -16 + 8 = -8 < 0$ und

$f(\ln(2)) = -e^{2\cdot\ln(2)} + 4e^{\ln(2)} = -2^2 + 4\cdot 2 = 4$

erhält man den Hochpunkt $H(\ln(2)\,|\,4)$.

www.mvurl.de/bqc2

1.3 Schaubild K:



1.4 Fläche A von K mit den Koordinatenachsen: $\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx \quad (= 4{,}5)$

Mittelwert von f auf $[0; \ln(4)]$: $m = \frac{1}{\ln(4)} \cdot \int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx \left(= \frac{4{,}5}{\ln(4)} \approx 3{,}246...\right)$

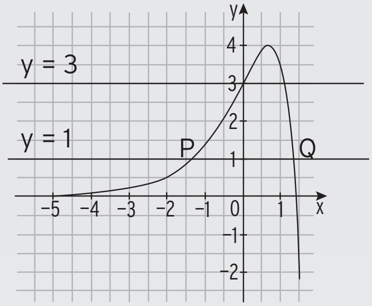
Verhältnis: $\frac{A}{m} = \ln(4) = 1{,}3862...$

Die Aussage ist falsch, da der Flächeninhalt A nur etwa das 1,4-fache des Mittelwertes ist.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

1.5.1 Am Schaubild ist ersichtlich: Um zwei Schnittstellen zu erhalten, von denen eine positiv und eine negativ ist,
sind für c nur folgende Werte möglich:
$0 < c < 3$



1.5.2 Für c = 1 gilt: $f(x) = 1$ $\qquad -e^{2x} + 4e^x = 1$

$$e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$$

Substitution $u = e^x$: $\qquad u^2 - 4u + 1 = 0$

Lösungen in u mit Formel: $\quad u_{1|2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$

$$u_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}\ ;\ u_2 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

Rücksubstitution: $\qquad u = e^x = 2 - \sqrt{3}\ ; \qquad u = e^x = 2 + \sqrt{3}$

Lösungen in x: $\qquad x_1 = \ln(2 - \sqrt{3}); \qquad x_2 = \ln(2 + \sqrt{3})$

Die x-Werte haben den selben Betrag: $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$

Die Punkte $P(\ln(2 - \sqrt{3})\ |\ 1)$ und $Q(\ln(2 + \sqrt{3})\ |\ 1)$ haben denselben Abstand von der y-Achse und diese halbiert somit $\overline{PQ}$.

1.6 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = f(x) + f(-x)$
Symmetrie zur y-Achse: $g(-x) = g(x)$
Symmetrie zum Ursprung: $g(-x) = -g(x)$
Es gilt: $g(-x) = f(-x) + f(-(-x)) = f(-x) + f(x) = g(x)$
Somit ist das Schaubild von g symmetrisch zur y-Achse.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel Aufgabe 2

Anwendungsorientierte Analysis

2.1 x: Anzahl von Jahren ab 2012 (d.h. $x = 0$ entspricht dem Jahr 2012)

Im Jahr 2012 beträgt der Abstand des Gletscherendes zum Fundort der Ausrüstung 7 km. Die angegebene Gerade modelliert den um durchschnittlich 0,2 km pro Jahr abnehmenden Abstand, denn die Steigung der angegebenen Gerade beträgt $-0{,}2$.

2.2.1 $v(71) = 0{,}1319\ldots$ (in km/Jahr) $(71 = 2021 - 1950)$

Im Jahr 2021 bewegt sich der Gletscher mit einer Geschwindigkeit von etwa 132 Meter pro Jahr talwärts.

2.2.2 Mittelwert der Funktion v auf [0; 71]:

$$\frac{1}{71} \cdot \int_0^{71} (7{,}56 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 - 2{,}27 \cdot 10^{-4} \cdot t + 0{,}11)\, dt$$

$$= \frac{1}{71} \cdot \left[\frac{7{,}56 \cdot 10^{-6}}{3} \cdot t^3 - \frac{2{,}27 \cdot 10^{-4}}{2} \cdot t^2 + 0{,}11 \cdot t\right]_0^{71}$$

$$= \frac{1}{71} \cdot \left(\frac{7{,}56 \cdot 10^{-6}}{3} \cdot 71^3 - \frac{2{,}27 \cdot 10^{-4}}{2} \cdot 71^2 + 0{,}11 \cdot 71\right) = 0{,}1146\ldots \quad .$$

www.mvurl.de/quyn

Somit hat sich der Gletscher von 1950 bis 2021 um durchschnittlich etwa 115 m pro Jahr talabwärts bewegt.

2.2.3 Wie viele Jahre x dauert es von 2012 an, bis die kleinen Ausrüstungsteile, die bei der Bergung im Eis verblieben sind, vom Gletscherende freigegeben werden?

Erläuterung: Über $\int_{62}^{62+x} v(t)\, dt$ wird der vom Gletscher in dieser Zeit zurückgelegte Weg talwärts berechnet.

$-0{,}2 \cdot x + 7$ berechnet den Abstand des Gletscherendes vom ursprünglichen Fundort.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

3.1 Die Periodendauer von v beträgt: $T = \frac{2\pi}{5} = 1{,}2566...$ (in s).

Bis zum ersten Mal der Umkehrpunkt P2 erreicht wird, was an negativen Funktionswerten von v deutlich wird, verstreicht eine halbe Periode von ca. 0,63 Sekunden.

3.2 $a(t) = v'(t) = 2{,}5 \cdot \cos(5t)$; (in $\frac{m}{s^2}$)

a(t) gibt die momentane Beschleunigung der Kugel an.

Momentane Beschleunigung nach 0,2 s: $a(0{,}2) = 1{,}3507$ ...

www.mvurl.de/yo74

Durchschnittliche Beschleunigung innerhalb der ersten 0,2 s:

$\frac{v(0{,}2)}{0{,}2} = 2{,}1036... \left(\text{in } \frac{m}{s^2}\right)$

Hinweis: Auch über den Mittelwert der Funktion a im angegeben Zeitraum gelangt man zu dieser Berechnung:

$$\frac{1}{0{,}2} \cdot \int_0^{0{,}2} (a(t))\,dt = \frac{1}{0{,}2} \cdot [v(t)]_0^{0{,}2} = \frac{1}{0{,}2} \cdot (v(0{,}2) - v(0)) = \frac{1}{0{,}2} \cdot v(0{,}2)$$

3.3.1 Die Geschwindigkeit v ist die momentane Änderungsrate der zurückgelegten Wegstrecke, welche durch die Funktion b angegeben wird.

Damit ist b eine Stammfunktion von v: $b(t) = -\,0{,}1 \cdot \cos(5t) + c$.

Nach einer Viertel Periode $\left(t = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}\right)$ befindet sich das Pendel genau unter dem Aufhängepunkt und hat keine Auslenkung: $b\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$.

Um c zu bestimmen wird eine Punktprobe durchgeführt:

$-\,0{,}1 \cdot \cos(5 \cdot \frac{\pi}{10}) + c = 0 \Rightarrow c = 0$;

Man erhält: $b(t) = -\,0{,}1 \cdot \cos(5t)$

3.3.2 α wird über das Verhältnis von Auslenkwinkel zur entsprechenden Länge des Kreisbogens berechnet.

Umfang des Kreises: $U = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}4 = 0{,}8\pi$ (entspricht 360°)

Aus der Funktion b ergibt sich eine maximale Länge des Kreisboges von 0,1.

Es gilt: $\frac{\alpha}{360°} = \frac{0{,}1}{0{,}8\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{0{,}1}{0{,}8\pi} \cdot 360° = \frac{45°}{\pi} = 14{,}3239°$

Damit beträgt der Winkel etwa 14,3°.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

4.1 $c = f(0)$ gibt den Anfangsbestand an; nach 1600 Jahren ist noch der halbe Anfangsbestand $\frac{c}{2}$ vorhanden: $\frac{c}{2} = c \cdot e^{k \cdot 1600}$

www.mvurl.de/li45

Dividieren durch c ($c > 0$): $\frac{1}{2} = e^{1600k}$

Logarithmieren: $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1600k$

Lösung: $k = -0{,}0004332...$

Somit: $f(t) = c \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot t}$

Aus $f(20) = 99{,}14$ folgt: $c \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot 20} = 99{,}14 \Rightarrow c = 100{,}002...$

Insgesamt erhält man: $f(t) = 100{,}002 \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot t}$

4.2 $f(t)$ beschreibt die zum Zeitpunkt t vorhandene Masse an Radium 226 in g. $f(0) - f(t)$ ist die Masse an Radium in g, die von Beobachtungsbeginn bis zum Zeitpunkt t zerfallen sind.

Durch $\frac{f(0) - f(t)}{f(0)} = 0{,}9$ bzw. $f(0) - f(t) = 0{,}9 \cdot f(0)$ kann somit der Zeitpunkt bestimmt werden, an dem 90 % der zu Beobachtungsbeginn vorhandenen Radiummasse zerfallen sind.

4.3.1 Momentane Änderungsrate:

1. Ableitung mit der Kettenregel: $f'(t) = -0{,}06498 \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot t}$; $t \geq 0$

f' ist streng monoton steigend (da $f''(t) > 0$ oder der Graph von f' strebt von unten an die t-Achse für $t \to \infty$)

Zeitpunkt an dem am meisten Radium zerfällt: $t = 0$

Änderungsrate: $f'(0) = -0{,}06498 \cdot e^0 = -0{,}06498$ (in g pro Jahr)

4.3.2 Der Bestand zum Zeitpunkt t beträgt $f(t)$ mit $f(t) = 150e^{-0{,}0004332 \cdot t}$.

$(-4{,}332 \cdot 10^{-4} = -0{,}0004332)$

a Jahre später beträgt der Bestand $f(t + a)$.

Anteil: $\frac{f(t+a)}{f(t)} = \frac{150 \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot (t+a)}}{150 \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot t}} = \frac{e^{-0{,}0004332 \cdot t} \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot a}}{e^{-0{,}0004332 \cdot t}}$

$$\frac{f(t+a)}{f(t)} = e^{-0{,}0004332 \cdot a}$$

Somit hängt der Anteil nur von a ab.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Stochastik

www.mvurl.de/9qyd

1.1.1 Beim Aufprall auf einen Stift sind nur zwei Ausgänge (links oder rechts) möglich. Die Wiederholungen sind stochastisch unabhängig (konstante Wahrscheinlichkeiten). Somit liegt eine Bernoulli-Kette vor.

X: Anzahl, wie oft die Kugel die Stifte rechts passiert.

Mögliche Werte für X: 0, 1, 2, 3, 4.

1.1.2 X (wie in 1.1.1) ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 4$ und $p = 0{,}5$.

$P(A) = P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}6875 = 0{,}3125$

$\overline{B}$: Die Kugel wird viermal nach rechts oder viermal nach links abgelenkt

$P(B) = 1 - P(X = 0) - P(X = 4) = 0{,}875 \; (= 1 - 2 \cdot 0{,}5^4)$

1.2 Bei n Versuchen mindestens ein mangelhaftes Brett:

P(mind. ein mangelhaftes Brett) = 1 − P(kein mangelhaftes Brett) = $1 - 0{,}95^n$

Bedingung: $1 - 0{,}95^n > 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad 0{,}95^n < 0{,}1$

Die Gleichung $0{,}95^n = 0{,}1$ hat die Lösung $n = \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}95)} = 44{,}8\ldots$

Man muss also mindestens 45 Bretter überprüfen. Die Aussage ist falsch.

Alternative Lösung:

Durch $1 - 0{,}95^{45} = 0{,}9005\ldots > 0{,}9$ kann direkt gezeigt werden, dass nur mind. 45 Bretter ausreichen und die Aussage falsch ist.

1.3 n = 8; k = 4 (Kugel im mittleren Fach);

p = unbekannte Wahrscheinlichkeit, dass Kugel nach links abprallt

Bedingung: $P(X = 4) = \binom{8}{4} \cdot p^4 \cdot (1 - p)^4 = 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad 70 \cdot p^4 \cdot (1 - p)^4 = 0{,}1$

$\Leftrightarrow \quad p^4 \cdot (1 - p)^4 = \frac{1}{700} \quad \Leftrightarrow \quad (p \cdot (1 - p))^4 = \frac{1}{700} \quad \Leftrightarrow p \cdot (1 - p) = \sqrt[4]{\frac{1}{700}} \approx 0{,}19443$

Quadratische Gleichung: $p - p^2 = 0{,}19443 \quad \Rightarrow \quad p^2 - p + 0{,}19443 = 0$

Lösungen in p mit Formel: $p_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}19443}}{2}$

$p_1 \approx 0{,}264; \qquad p_2 \approx 0{,}735$

Aufgrund der Schrägstellung muss $p > 0{,}5$ gelten. Somit ist $p = 0{,}735\ldots$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2.1 $P(A) = 0{,}76^2 \cdot 0{,}24^3 = 0{,}007984...$ (Die Reihenfolge ist bekannt.)

X: Anzahl der Wähler

$n = 4$; $P(B) = P(X \leq 3) = 1 - 0{,}76^4 = 0{,}6663...$

$n = 20$; $P(C) = P(11 < x < 18) = P(X \leq 17) - P(X \leq 11) = 0{,}8594...$

2.2 y: Anzahl der Nichtwähler

Bedingung: $y + 3y = 136 \Rightarrow y = 34$

www.mvurl.de/gpa6

X: Anzahl der Wähler unter 136 Wahlberechtigten

$X = 136 - 34 = 102$; $P(X = 102) = 0{,}07593...$

2.3.1 M: Wähler hat Partei M gewählt mit $P(M) = 0{,}26$;

B: Wähler hat per Briefwahl abgestimmt mit $P(B) = 0{,}29$

Zusätzlich gilt: $P_B(M) = 0{,}08$

Aus $P_B(M) = \frac{P(B \cap M)}{P(B)}$ folgt $P(B \cap M) = P_B(M) \cdot P(B) = 0{,}08 \cdot 0{,}29 = 0{,}0232$

Aus $P(B \cap M) + P(\overline{B} \cap M) = P(M)$ folgt

$P(\overline{B} \cap M) = P(M) - P(B \cap M) = 0{,}26 - 0{,}0232 = 0{,}2368$

Es liegt eine Fragestellung zu einer bedingten Wahrscheinlichkeit vor, da nur die Wähler der Partei M die Grundmenge darstellen

$P_M(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}2368}{0{,}26} = 0{,}91 = 91\,\%$

2.3.2 $P(B \cap M) + P(\overline{B} \cap M) = P(M)$

$\Leftrightarrow 0{,}29 \cdot y + 0{,}71 \cdot 0{,}3 = 0{,}26$

$\Rightarrow y = P_B(M) = \frac{47}{290} = 0{,}162... > 0{,}08$

Damit ist die Aussage wahr.

Alternative: Mit $P(B \cap M) = P_B(M) \cdot P(B)$ und $P(\overline{B} \cap M) = P_{\overline{B}}(M) \cdot P(\overline{B})$

erhält man $0{,}29 \cdot P_B(M) + 0{,}71 \cdot P_{\overline{B}}(M) = 0{,}26$

Einsetzen von $P_{\overline{B}}(M) = 0{,}30$ ergibt $0{,}29 \cdot P_B(M) + 0{,}71 \cdot 0{,}30 = 0{,}26$

und damit $P_B(M) = 0{,}162 > 0{,}08$

Damit ist die Aussage wahr.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

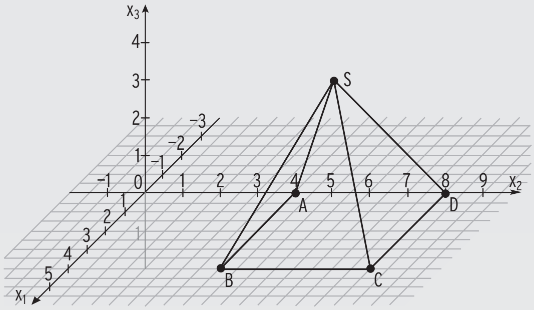
Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie **Seite 1/2**

www.mvurl.de/vcrs

1.1 Die Diagonalen der Grundfläche schneiden sich in M(2 | 6 | 0). Da eine Höhe von 4 vorliegt, ergibt sich die Spitze S(2 | 6 | 4).

1.2 Zeichnung



1.3 Die Höhe der Dreiecke wird über des Satz des Pythagoras berechnet:

$h_s^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow h_s = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$

Fläche der 4 Dreiecke, die die Seitenflächen bilden:

$A = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot\ 2 \cdot \sqrt{5}\right) = 16 \cdot \sqrt{5}$ in m^2.

Da die Beschichtung 1500 Euro pro Quadratmeter kostet, muss insgesamt mit etwa 53666 ($\approx 16 \cdot \sqrt{5} \cdot 1500$) Euro gerechnet werden.

1.4 S ist der höchste Punkt der Pyramide und damit entscheidend.

Der Schattenpunkt von S ist der Spurpunkt S_{12} der Geraden g mit

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und der x_1x_2 - Ebene, falls der Schatten den Boden trifft, bevor er die fensterlose Wand trifft.

Aus $x_3 = 0$ folgt: $0 = 4 - 8r \Rightarrow r = 0{,}5$

Einsetzen führt auf: $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{12}\ (3 \mid 1 \mid 0)$

Da die x_2-Koordinate von S_{12} größer als 0 ist, trifft der Schatten der Pyramide die x_1x_3-Ebene nicht und damit auch nicht auf die fensterlose Wand.

1.5 Der Sicht der Kamera in Richtung des punktförmigen Objektes wird inbesondere durch die Seitenfläche CDS der Pyramide begrenzt.

Die Ebene E durch die Punkte K, S und C gibt die Grenze des Sichtbereiches der Kamera an. $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CK} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie **Seite 2/2**

1.5 Der Normalenvektor $\vec{n}$ steht orthogonal zu diesen Vektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix} = -10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gleichung von E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot (-10) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ E: $x_1 + x_2 + x_3 = 12$

Die Bewegung des punktförmigen Objektes wird duch die Gerade h erfasst:

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; Gleichung der Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s \geq 0$.

Schnitt von E und h: Die Koordinaten des allgemeinen Geradenpunktes von h

$(5 + 4s \mid 4 + 4s \mid 2)$ werden in E eingesetzt:

$(5 + 4s) + (4 + 4s) + 2 = 12 \Rightarrow s = 0{,}125$.

Einsetzen in h: $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}125 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(5{,}5 \mid 4{,}5 \mid 2)$

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie **Seite 1/2**

www.mvurl.de/gnit

2.1 Ort P eine Minute nach Beginn des Landeanflugs:

$$\begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 \\ -44 \\ 2{,}9 \end{pmatrix} \Rightarrow P(-44 \mid -44 \mid 2{,}9)$$

Abstand: $\left|\overrightarrow{PS}\right| = \sqrt{55^2 + 58^2 + (-2{,}77)^2} = 79{,}9792...$

Die gesuchte Entfernung beträgt etwa 80 km.

2.2 Es wird der (minimale) Abstand der beiden (windschiefen) Geraden g und h berechnet. Das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren liefert eine Vektor, der auf beiden senkrecht steht: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\text{Abstand: } d = \left| \frac{\left(\begin{pmatrix} -40 \\ -40 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{0{,}2^2 + 0^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{16{,}04}} \right|$$

$$d = \left| \frac{8 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 4}{\sqrt{16{,}04}} \right| = 0{,}8988... > 0{,}8$$

Das Flugzeug durchfliegt den Luftraum also nicht.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie **Seite 2/2**

2.3 Beim Aufsetzen auf der Landebahn gilt (in km) $x_3 = 0{,}1$.

Berechnung des Landepunktes: $3{,}1 - 0{,}2t = 0{,}1 \Rightarrow t = 15$

Einsetzen in g: $\begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Landepunkt (12 | 12 | 0,1)

Berechnung des Winkels:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{0{,}2}{\sqrt{16+16+0{,}04}} = 0{,}0353... \Rightarrow \alpha \approx 2{,}025°$$

Der Winkel beim Aufsetzen beträgt etwa 2°.

2.4.1 Aus den Koordinaten der Punkte A und C kann entnommen werden, dass das Rechteck die Länge 11 km und die Breite 4 km aufweist. Da die Seiten parallel zur x_1- und x_2-Achse sind, ergeben sich die Koordinaten B(11 | 0 | 0,2) und D(0 | 4 | 0,2)

2.4.2 Es wird ermittelt, wann sich das Flugzeug 300 m über der Stadthöhe und somit 500 m über dem Meeresspiegel befindet.

Bedingung: $x_3 = 0{,}5$: $3{,}1 - 0{,}2t = 0{,}5 \Rightarrow t = 13$

Einsetzen in g: $\begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Q(4 | 4 | 0,5)

Anhand der Koordinaten von Q wird deutlich, dass Q genau 300 m über der Stadtgrenze liegt. Q wird nach 13 Minuten erreicht.

Berechnung des Flugzeugortes vor diesem Zeitpunkt (z.B. in t = 12):

$\begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}7 \end{pmatrix} \Rightarrow$ (0 | 0 | 0,7)

Der Punkt (0 | 0 | 0,7) liegt über der Stadt (über dem Punkt A).

Das sinkende Flugzeug verlässt somit im Punkt Q den Luftraum über der Stadt und hatte vor t = 13 stets eine größere Höhe als in Q.

Die Mindesthöhe von 300 m wird also überall beim Flug über die Stadt eingehalten.

Hauptprüfung 2021/2022

Teil 1 ohne Hilfsmittel Aufgabe 1 **Lösungen Seite 261 - 272**

Analysis **Punkte**

1.1 Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 2 \cdot e^x$. 4

Ordnen Sie die Werte

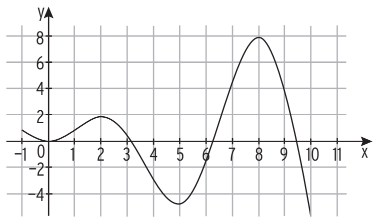
$f(0)$, $f'(1)$ und $\int_0^1 f(x)\,dx$

nach deren Größe in aufsteigender Reihenfolge.

1.2 Die Funktion g ist gegeben durch

$g(x) = x \cdot \sin(x); \quad -1 \leq x \leq 10$.

Die Abbildung zeigt das Schaubild K_g von g.



1.2.1 Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von K_g mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$. Geben Sie die Anzahl der Berührpunkte an. 3

1.2.2 Zeigen Sie, dass die Funktion G mit 3

$G(x) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x); \; -1 \leq x \leq 10,$

eine Stammfunktion von g ist.

Geben Sie zudem die Stammfunktion von g an, deren Schaubild den Punkt $(0 \mid 7)$ enthält.

1.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion h, die die beiden folgenden Eigenschaften hat: 5

- Der Graph von h schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x + 1$ im Punkt $(0 \mid 1)$ unter einem rechten Winkel.
- Die x und die y-Koordinate des Extrempunkts des Graphen von h stimmen überein.

$\overline{15}$

Hauptprüfung 2021/2022

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2 Eine ideale Münze zeigt nach jedem Wurf entweder Kopf oder Zahl an.

2.1 Man wirft die Münze solange bis sie Zahl zeigt, jedoch höchstens dreimal.

2.1.1 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das dieses Zufallsexperimt volständig beschreibt. 2

2.1.2 Bestimmen Sie, wie oft man die Münze im Mittel wirft. 2

2.2 Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie. 4

(1) Wird die Münze fünfmal hintereinander geworfen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau einmal Zahl" größer als $\frac{1}{8}$.

(2) Es gibt eine Anzahl von Würfen für die Folgendes gilt:
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "genau dreimal Zahl" ist gleich der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "genau zweimal Zahl".

$\overline{8}$

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik

Ein Stapel besteht aus sechs zufällig angeordneten Karten. Davon zeigen zwei Karten das Bild "Bube", zwei das Bild "Dame" und zwei das Bild "König". Die oberste Karte des Stapels wird von einem Spieler gezogen und deren Bild wird notiert. Vor dem nächsten Zug wird die Karte wieder in den Stapel zurückgelegt und dieser neu gemischt.
Der Spieler zieht dreimal nacheinander die oberste Karte des Stapels.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: 5

E_1: Der Spieler hat drei verschiedene Bilder gezogen.

E_2: Der Spieler hat genau einmal einen Buben gezogen.

E_3: Der Spieler hat mindestens einmal einen Buben oder mindestens zwei mal einen König gezogen.

2.2 Im Folgenden beträgt der Einsatz 5 Euro. 3

Der Spieler erhält nur dann eine Auszahlung, falls mindestens zweimal das gleiche Bild gezogen wird. Die Auszahlung beträgt 18 Euro, falls der Spieler dreimal das gleiche Bild zieht.
Ermitteln Sie die Auszahlung, die der Spieler im verbleibenden Fall erhalten muss, damit es sich um ein faires Spiel handelt.

$\overline{8}$

Hauptprüfung 2021/2022

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3 Für ein Viereck ABCD mit den Eckpunkten A, B, C und D gilt:
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.1 Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{DA}$. 3
Weisen Sie nach, dass dieses Viereck ein Rechteck ist.

3.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A, sodass sich 2
die Diagonalen des Vierecks ABCD in (3,5 | 4 | 1,5) schneiden.

3.3 Durch Streckung des Vierecks ABCD wird dessen Flächeninhalt um den 2
Faktor 5 vergrößert. Die Seitenverhältnisse bleiben dabei unverändert.
Berechnen Sie eine Seitenlänge des entstehenden, vergrößerten Vierecks.

$\overline{7}$

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

Die Gerade g geht durch die Punkte A(2 | − 2 | 2) und B(2 | 4 | 5).

3.1 Begründen Sie, dass g parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene ist, aber 2
nicht in dieser Ebene liegt.

3.2 Bestimmen Sie einen Punkt auf g, sodass 2 : 1 das Verhältnis der 2
Streckenlängen $\overline{AP} : \overline{BP}$ ist.

3.3 C(4 | 2 | 1,5) ist ein weiterer Punkt und M(2 | 1 | 3,5) ein Punkt auf g. 3
Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{MC}$ zueinander orthogonal
sind. Berechnen sie den Abstand von C zur Geraden g.

$\overline{7}$