Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Norbert Lengersdorf
Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

Umschlag: Kreis links: www. adpic.de
Kreis rechts: Robert Kneschke – Fotolia.com

* * * * *

16. Auflage 2024

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0478-16
ISBN 978-3-8120-1133-4

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg mit gymnasialer Oberstufe in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2025 an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung. **Alle Aufgaben sind entspechend den Abiturvorgaben 2025 ausgewählt worden.**
Die zentrale Abiturprüfung 2025 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel (GTR/CAS).
Die Aufgaben für den Grundkurs sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten:
Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra.

Im Analysis-Teil werden als thematischer Schwerpunkt die ganzrationalen Funktionen und die Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mit Hilfe dieser Funktionstypen verlangt. Dabei handelt es sich um das Modell des Angebotsmonopols sowie die Absatz-/Umsatzentwicklung.
Die Stochastik behandelt fokussiert die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung mit Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung und den einseitigen Hypothesentest.
Die Lineare Algebra hat die Schwerpunkte Lineare Gleichungssysteme und Lineare Optimierungsprobleme sowie mehrstufige Produktionsprozesse als ökonomische Anwendung.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Die Aufgaben sind als Übungsaufgaben zu verstehen, sowohl im Umfang als auch in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2025

Grundkurs

Aufgabenteil A Bearbeitung ohne Hilfsmittel				**Aufgabenteil B Bearbeitung mit Hilfsmittel**	
Pflichtaufgaben		Wahlaufgaben (zwei aus vier, davon eine Analysis)		Pflichtaufgaben	
Analysis	5	Analysis	5	Analysis	25
Stochastik	5	Analysis	5	Stochastik	25
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5	Stochastik	5	Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	25
		Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5		
Summe	15	Summe	10	Summe	75
Gesamtsumme: 100 BE + 5 BE (Darstellungsleistung) = **105 BE**					

Mindestens zwei der Teilaufgaben im Aufgabenteil A haben **Anwendungsbezug.**

Die Aufgaben sowohl im Teil A als auch im Teil B bestehen jeweils aus Teilaufgaben.

Organisation

Zu Beginn der Bearbeitungszeit erhält der Prüfling die beiden zu bearbeitenden Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel (GTR, CAS, Formelsammlung) werden noch nicht ausgegeben.

Der Prüfling gibt individuell nach Bearbeitung den Aufgabenteil A und seine Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhält im Gegenzug Zugang zu den zugelassenen Hilfsmitteln.

SchülerIn bearbeitet alle Aufgaben.

Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Prüfungsteile beträgt im Grundkurs einschließlich Auswahlzeit 255 Minuten.

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

I Hilfsmittelfreier Teil A der Zentralen Abiturprüfung

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 19

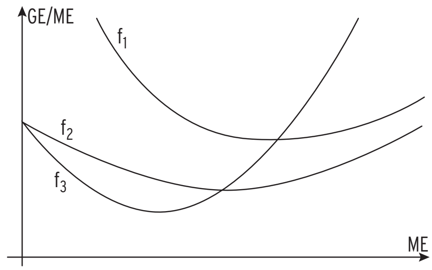
Aufgabe 1 **Punkte**

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, c, d > 0$, $b < 0$,

x in ME, K(x) in GE,

sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.

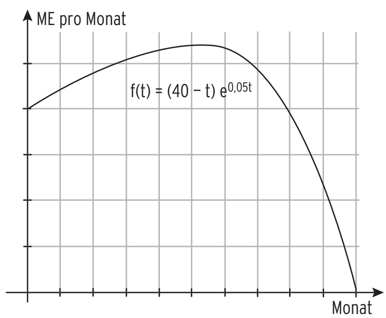


1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu. 2

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt. 3

Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0,05t}$, (t in Monaten, f(t) in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann. 2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei t = 20 liegt. 3

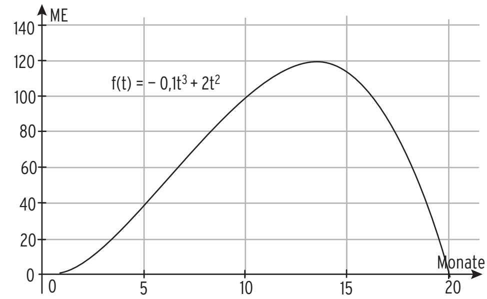
($f''(t) = -\frac{1}{400}\,t\,e^{0,05t}$ kann verwendet werden.)

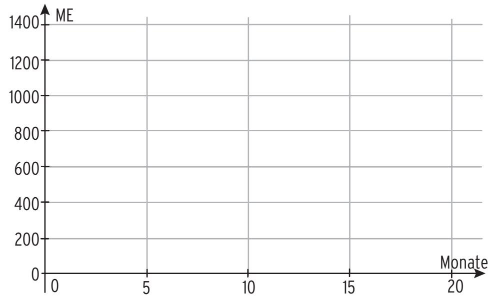
Hilfsmittelfreier Teil - Analysis **Lösungen Seite 20**

Aufgabe 3

Punkte

Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit
$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$
(t in Monaten, f(t) in ME/Monat)
modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.

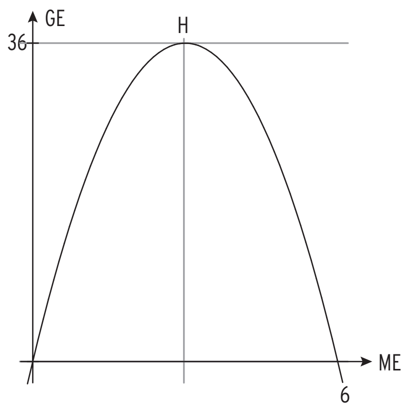




3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge. 3

3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt. 2

Aufgabe 4



a) Bestimmen Sie den Funktionsterm für die Erlösfunktion unter der Voraussetzung, dass es sich um eine ganzrationale Funktion 2. Grades handelt. 3

b) Ergänzen Sie den Graphen der 1. Ableitung in das Koordinatensystem. Beschreiben Sie den Verlauf des Ableitungsgraphen mathematisch und ökonomisch.

2

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 21

Aufgabe 5

Punkte

Die folgende Tabelle gibt die Stückkosten k, die variablen Stückkosten k_v und die Grenzkosten K′ zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K an (x in ME; K(x) in GE):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
k(x)	201,0	124,0	97,0	84,0	77,8	76,0	77,6	82,0
$k_v(x)$	57,0	52,0	49,0	48,0	49,0	52,0	57,0	64,0
K′(x)	51,0	44,0	43,0	48,0	59,0	76,0	99,0	128,0

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

1.1 Das Betriebsminimum liegt bei 4 ME. 2

1.2 Die Kosten steigen zwischen 0 und 4 ME degressiv. 1

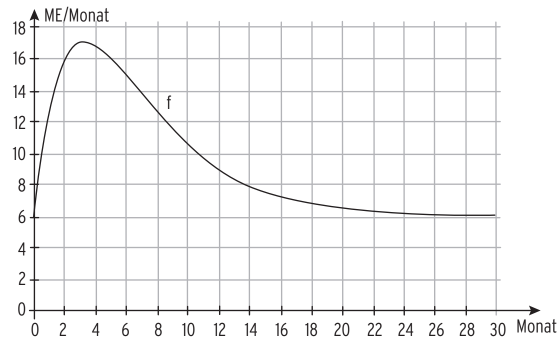
1.3 Die Fixkosten belaufen sich auf 144 GE. 2

Aufgabe 6

Die Absatzentwicklung eines Produktes wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$f(t) = 9t \cdot e^{-0{,}3t} + 6$

dabei steht $t > 0$ für die Monate und f(t) für den Absatz in ME pro Monat.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die monatlichen Absatzzahlen maximal werden (notwendiges Kriterium genügt). 3

2.2 Nehmen Sie mit Hilfe des Graphen Stellung zu der folgenden Aussage:
In der zweiten Hälfte des ersten Jahres liegt der Zeitpunkt des maximalen Absatzrückganges. 2

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 22

Aufgabe 7

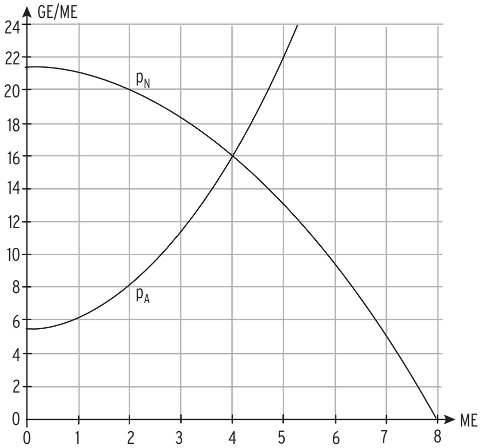
Punkte

Gegeben sind folgende Angebotsfunktion p_A und Nachfragefunktion p_N:

$p_A(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}$

$p_N(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

x in ME, p(x) in GE/ME

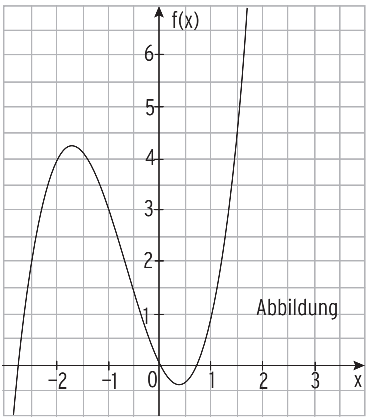


7.1 Berechnen Sie das Marktgleichgewicht. 3

7.2 Begründen Sie anhand der Graphen, dass die Konsumentenrente geringer ist als die Produzentenrente. 2

Aufgabe 8

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.



8.1 Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f.

8.2 Entscheiden Sie begründet mit Hilfe einer Zeichnung in der Abbildung, ob die Gerade g mit $y = \frac{1}{2}x + 5$ eine Tangente am Graphen von f im Punkt P (− 2 | 4) ist. 5

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

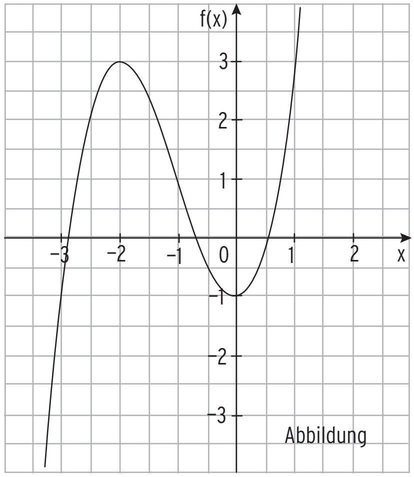
Lösungen Seite 23

Aufgabe 9

Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$. Die Koordinaten des lokalen Hochpunktes und des lokalen Tiefpunktes sind ganzzahlig.

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.

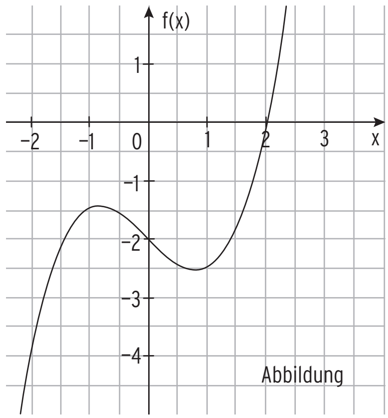


(1) Entscheiden Sie begründet, ob der Graph der Ableitungsfunktion f' eine nach oben oder nach unten geöffnete Parabel ist.

(2) Geben Sie alle Werte für den Parameter c an, so dass die Funktion g_c mit der Gleichung $g_c(x) = f(x) + c$ genau zwei Nullstellen besitzt. Begründen Sie Ihre Angabe. 5

Aufgabe 10

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x - 2$. Der Graph ist in der Abbildung dargestellt.



(1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die in der Zeichnung erkennbare Nullstelle tatsächlich eine Nullstelle ist.

(2) Gegeben ist die Funktion g_a mit der Gleichung $g_a(x) = f(x + a)$; $a \geq 0$. Geben Sie an, wie sich der Graph von g_a verändert, wenn man für a immer größere Zahlen einsetzt.

Geben Sie außerdem einen Wert für a an, so dass die Funktion g_a die Nullstelle $x = -1$ besitzt. 5

Hilfsmittelfreier Teil – Lineare Algebra Lösungen

Aufgabe 14 **Aufgaben Seite 36**

a) Es gilt der Zusammenhang (RE) = (RZ) · (ZE)

Man berechnet den Teil der Rohstoff-Endprodukt-Matrix, der R_3 betrifft:

$$(6 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (40 \quad 28 \quad 52) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 120$$

Man benötigt 120 ME von R_3, um jeweils eine ME von E_1, E_2 und E_3 herzustellen.

b) Ist x die Anzahl der ME von Z_1, so werden $6 \cdot x + 2 \cdot 1{,}5 \cdot x$ ME von R_3 benötigt:

$6 \cdot x + 2 \cdot 1{,}5 \cdot x = 54$ für $x = 6$

Anzahl der ME von Z_2: $1{,}5 \cdot 6 = 9$

Aufgabe 15

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a + 4c & 7b + 4d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vergleich ergibt $a = 0$; $b = 0{,}5$

Einsetzen ergibt: $c = \frac{1}{4}$ und aus $7 \cdot 0{,}5 + 4d = 0$: $d = -\frac{7}{8}$

Möglichkeit 2: B ist die Inverse von A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -8 & -2 & 7 \end{array}\right) \qquad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

b) Die Anzahl der Spalten von C ist 2, die Anzahl der Zeilen 1 oder mindestens 3.

Aufgabe 16 **Aufgaben Seite 37**

a) Es gibt keine optimale Lösung des Optimierungsproblems mit $y = 7$, weil die entsprechende waagerechte Gerade oberhalb des Planungspolygons verläuft.

Bei geeigneter Zielfunktion kann (8|3) eine Lösung des Optimierungsproblems sein, also kann es eine optimale Lösung mit $x = 8$ geben.

b) Der Stückdeckungsbeitrag d_x der Holzschläger liegt höher als der der Leichtmetallschläger d_y. Die Gerade $y = -\frac{d_x}{d_y} x + \frac{z}{d_y}$ hat daher eine Steigung kleiner als -1 (z. B. $-\frac{3}{2} < -1$). Am Diagramm erkennt man, dass die optimale Produktionsmenge der Holzschläger zwischen 8 und 9 ME liegen muss.

Aufgabe 17

a) Materialkosten pro Rasentrimmer T1, T2, T3: $(8 \;\; 11 \;\; 15) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (75 \;\; 49 \;\; 94)$

Die Materialkosten für einen Rasentrimmer T1 betragen 75 GE, für einen T2 sind es 49 GE und für einen T3 betragen sie 94 GE.

b) Es muss gelten: $(1 \;\; 1 \;\; 3) \cdot \begin{pmatrix} 3x \\ 5x \\ 4x \end{pmatrix} = 20x \leq 8000 \quad \Leftrightarrow x \leq 400$

Es können also maximal 1200 Rasentrimmer T1, 2000 Rasentrimmer T2 und 1600 Rasentrimmer T3 hergestellt werden.

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 51** **Punkte**

Bei der Produktion eines Elektrobauteils kommt es bei durchschnittlich 20 % der Bauteile zu statischen Aufladungen, die Probleme beim weiteren Verarbeitungsprozess bewirken können.
X ist die binomialverteilte Zufallsgröße, die die Anzahl problematischer Elektrobauteile bei einer Tagesproduktion von 50 Bauteilen angibt.

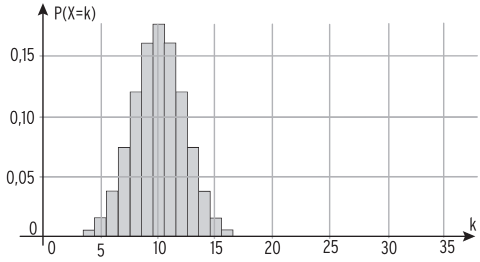


Abb. 1

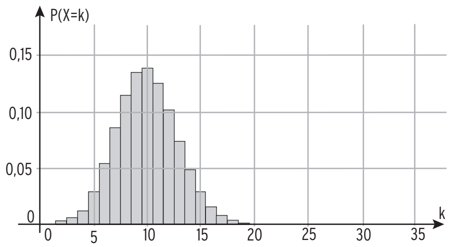


Abb. 2

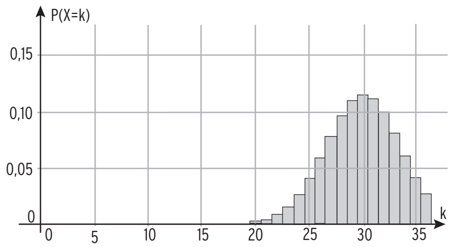


Abb. 3

1.1 Prüfen Sie, welche der obigen Abbildungen die zu X gehörige Verteilung ist. 2

1.2 Bestimmen Sie mit der von Ihnen ausgewählten Graphik näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl statisch aufgeladener Elektroteile um weniger als zwei vom Erwartungswert E(X) abweicht. 3

Aufgabe 2

Eine Firma fertigt Liegestühle in zwei verschiedenen Städten. In der Stadt A werden $\frac{1}{5}$ ihrer Waren hergestellt und der Rest in der Stadt B.
Leider passieren auch Produktionsfehler. So sind $\frac{1}{10}$ der Liegestühle aus A und $\frac{1}{100}$ der Stühle aus B defekt.

2.1 Ein Prüfer wählt aus der Gesamtproduktion zufällig einen Stuhl aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl defekt ist. 3

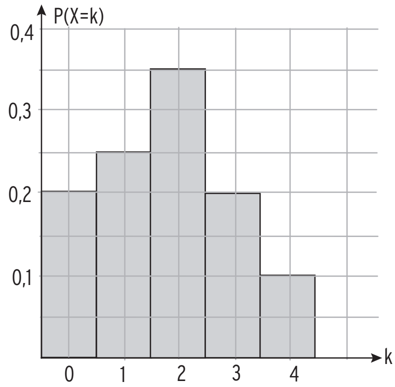
2.2 Die Firmenchefin wählt aus der Gesamtproduktion einen offensichtlich defekten Stuhl aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl in der Stadt A hergestellt worden ist. 2

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik

Lösungen Seite 51

Aufgabe 3

Punkte



Ein Unternehmen macht mit seinem Produkt einen Gewinn zwischen 0 und 4 Geldeinheiten. Es liegen unterschiedliche Angaben zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten vor.

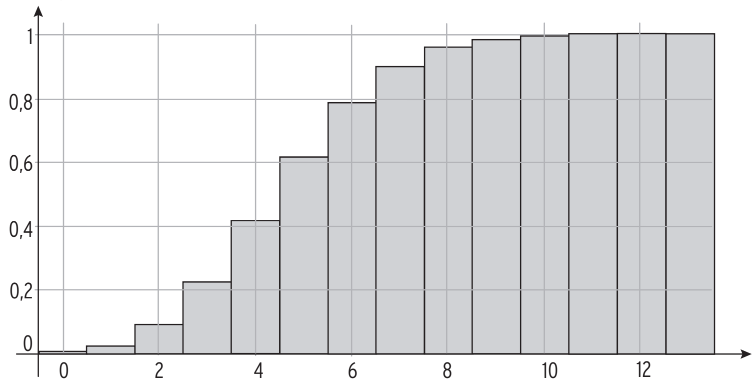
3.1 Erklären Sie, warum der obige Graph nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer ganzzahligen Zufallsgröße beschreiben kann. 2

3.2 Die ZufallsgrößeX gibt den Gewinn, den das Unternehmen mit seinem Produkt macht, an. Die obige Graphik stellt für einen Gewinn von 0 GE, 3 GE und 4 GE die Wahrscheinlichkeiten richtig dar. Es ist bekannt, dass der erwartete Gewinn bei 1,7 GE liegt. Ermitteln Sie die korrekten Wahrscheinlichkeiten für X = 1 und X = 2. 3

Aufgabe 4

Lösungen Seite 52

25 % der Mitarbeiter/-innen eines Großunternehmens klagen über eine zu hohe Arbeitsbelastung. Das Balkendiagramm gibt die kumulierte Binomialverteilung für eine Stichprobe von n = 20 an.



4.1 Geben Sie allein unter Zuhilfenahme des Diagramms die ungefähren Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse an:

A: Genau 6 Mitarbeiter/-innen sind unzufrieden.

B: Weniger als 8 Mitarbeiter/-innen fühlen sich überlastet.

C: Mindestens 15 Mitarbeiter/-innen sind zufrieden. 3

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik

Aufgabe 4 Fortsetzung **Punkte**

4.2 Nach Einführung eines neuen Arbeitszeitmodells beklagen nur noch zwei von 20 Personen die Arbeitsbelastung. Beurteilen Sie mit Hilfe des Diagramms, ob mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit von einer geringeren Unzufriedenheit als 25 % ausgegangen werden kann. 2

Aufgabe 5 **Lösungen Seite 52**

Eine Textilfabrik stellt unter anderem weiße T-Shirts her. Von diesen werden 50 % gefärbt und 50 % bestickt. Beim Färben sind 10 % der T-Shirts nicht farbecht, 20 % der anderen Hälfte sind fehlerhaft bestickt.

5.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar. 2

5.2 Die Herstellungskosten für alle T-Shirts betragen im Mittel 0,2 GE pro Stück. Die korrekt gefärbten T-Shirts werden zu einem Preis von 2 GE pro Stück, die fehlerhaft gefärbten T-Shirts werden als 2. Wahl zu einem Preis von 1 GE pro Stück verkauft. Die korrekt bestickten T-Shirts erzielen einen Erlös von 2,5 GE pro Stück, wohingegen die fehlerhaft bestickten T-Shirts zusätzliche Kosten in Höhe von 1 GE pro Stück verursachen. Berechnen Sie den durchschnittlich zu erwartenden Stückdeckungsbeitrag. 3

Aufgabe 6

Eine verbeulte Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen“ fällt, beträgt p.

6.1 Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse A und B an: 3

A: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen“.

B: Bei 5 Würfen fällt genau dreimal „Wappen“, darunter bei den ersten beiden Würfen zweimal.

6.2 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 3 Würfen dreimal „Wappen“ fällt, ist 0,216. Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen“ wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl“. 2

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik **Lösungen Seite 52**

Aufgabe 7 **Punkte**

Bei der Herstellung eines Produktes sind durchschnittlich 20 % der Teile fehlerhaft.

Zu Testzwecken werden der laufenden Produktion einige Teile entnommen.

7.1 Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der entnommenen Teile angibt, die fehlerhaft sind. Begründen Sie, warum man die Zufallsvariable X als binomialverteilt annehmen kann. 2

7.2 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die ersten beiden entnommenen Teile nicht fehlerhaft sind. 1

7.3 Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis A und ein Ereignis B an, so dass gilt:

$P(A) = 0{,}2^{10}$ $\qquad$ $P(B) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}2^{10} \cdot 0{,}8^{40}$ 2

Aufgabe 8 **Lösungen Seite 53**

Von den 100 Schülerinnen und Schülern einer Jahrgangsstufe wählt die eine Hälfte als Naturwissenschaft Physik, die andere Hälfte Biologie.

Die Jahrgangsstufe umfasst insgesamt 60 Mädchen. 30 % sind Jungen und haben Physik gewählt.

8.1 Stellen Sie den gegebenen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar. 3

8.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten,

- dass eine zufällig ausgewählte Schülerin Physik gewählt hat,
- dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer des Biologie-Kurses männlich ist. 2

Aufgabe 9

Die Zürla-Kohlin GmbH bezieht von einem Zulieferer seit Jahren selbstsichernde Muttern in großen Mengen, bei denen zwei Fehlerarten auftreten: Falsche Form und fehlerhaftes Gewinde.

Insgesamt sind nur 90 % aller Muttern fehlerfrei, d. h. sie haben weder eine falsche Form noch ein fehlerhaftes Gewinde. 5 % der Muttern haben eine falsche Form. 40 % der Muttern mit falscher Form haben auch ein fehlerhaftes Gewinde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Mutter mit fehlerhaftem Gewinde auch ein falsche Form? 5

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik **Lösungen Seite 54**

Aufgabe 10 **Punkte**

Ein Supermarkt verwendet für die Bearbeitung zurückgegebener Pfandflaschen eine Maschine. Diese soll einwandfreie Flaschen von deformierten Flaschen unterscheiden. Zurückgegebene Flaschen werden entweder von der Maschine abgewiesen oder angenommen. Dabei unterlaufen dem Gerät auch Fehler: Es werden manchmal auch einwandfreie Flasche abgewiesen oder deformierte Flasche angenommen. Eine Übersicht über Wahrscheinlichkeiten in diesem Zusammenhang liefert die noch unvollständige Vierfeldertafel (Tabelle).

	Flasche angenommen	Flasche abgewiesen	
Flasche einwandfrei	0,9405	0,0095	0,95
Flasche deformiert	0,0015	0,0485	0,05
	$\boxed{}$	$\boxed{}$	

10.1 In den beiden doppelt umrandeten Kästchen der letzten Zeile fehlen zwei Wahrscheinlichkeiten in dem vorliegenden Sachzusammenhang.
Berechnen Sie beide Wahrscheinlichkeiten und geben Sie diese in den Kästchen an.

10.2 Geben Sie die Bedeutung der beiden Wahrscheinlichkeiten aus 8.1 in dem vorliegenden Sachzusammenhang an.

10.3 Eine Flasche wird abgewiesen. Ermitteln Sie einen Term, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass die Flasche in Ordnung ist.

5

Hinweis: Die konkrete Berechnung wird nicht verlangt.

Aufgabe 11

Erfahrungsgemäß sind 4 % der produzierten Smartphones eines Herstellers defekt. Ein Lieferant erhält ein Paket mit 50 Smartphones des Herstellers. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens ein defektes Smartphone? Geben Sie einen Term an. 3

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik

Lösungen Seite 54

Aufgabe 12

a) Ein Fußballspieler verwandelt erfahrungsgemäß 80 % aller Strafstöße.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von vier Strafstößen

- nur den letzten?
- mindestens einen?

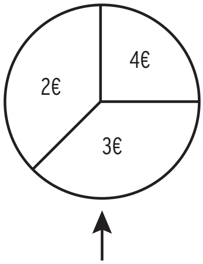
b) Für ein Ereignis C gilt: $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$

Geben Sie geeignete Werte für a, b und k an.

Beschreiben Sie das Ereignis C in Worten.

Aufgabe 13

Bei einem Glücksspiel wird das abgebildete Glücksrad benutzt. Als Einsatz bezahlt man 3 €. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Man erhält den Betrag ausbezahlt, dessen Sektor über dem Pfeil zu stehen kommt. Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn.



Aufgabe 14

Lösungen Seite 55

Eine Urne enthält 5 rote, 3 weiße und 2 gelbe Kugeln.

a) Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man keine gelbe Kugel?

b) Nun werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kugeln die gleiche Farbe?

Aufgabe 15

Bei einer Lotterie führen 5 % der Lose zu einem Gewinn. Nils kauft 14 Lose.

Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird.

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

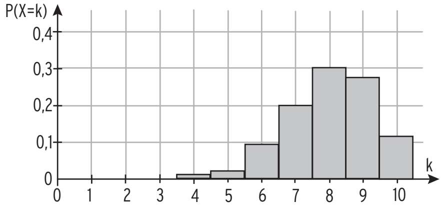
c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$

d) $14 \cdot 0{,}05$

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen Seite 55

Aufgabe 16 **Punkte**

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe. Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben. Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,8 angenommen. In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

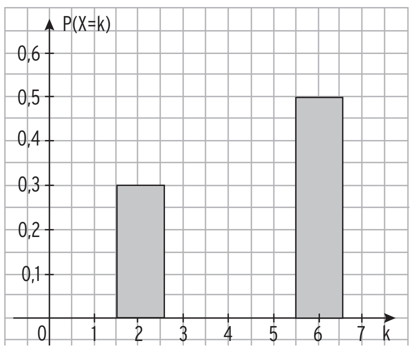


a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-maltrifft. 2

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$ ist. 3

Aufgabe 17

Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte 2, 4 und 6 annehmen kann. In der Abb. ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X unvollständig dargestellt.



a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit P(X = 4) an. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

b) Das Zufallsexperiment wird zweimal unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße notiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt dieser beiden Werte den Wert 12 ergibt. 5

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik **Lösungen Seite 56**

Aufgabe 18 **Punkte**

In einer Urne befinden sich zu Beginn eines Zufallsexperiments drei schwarze Kugeln (S) und zwei weiße Kugeln (W), siehe Abbildung 1.

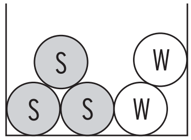


Abbildung 1

Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Zu dem Zufallsexperiment wurde das Baumdiagramm aus Abbildung 2 erstellt.

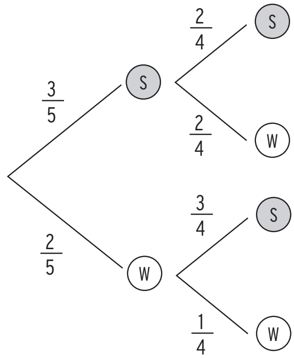


Abbildung 2

(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dem Zufallsexperiment mindestens eine schwarze Kugel gezogen wird. 2

(2) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X. 3

Aufgabe 19

In den Urnen U1 und U2 befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

U1 : 6 rote und 4 blaue Kugeln

U2 : 1 rote und 4 blaue Kugeln

1.1 Aus der Urne U1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben. 2

1.2 Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der Urne U1 stammt. 3

Aufgabe 20

Von acht Karten sind zwei mit „1“, zwei mit „2“, zwei mit „3“ und zwei mit „4“ beschriftet.

Die Karten werden gemischt und nacheinander verdeckt abgelegt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden zuerst abgelegten Karten mit „1“ beschriftet sind. 2

b) Die Karten werden nacheinander aufgedeckt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass spätestens die dritte aufgedeckte Karte mit einer geraden Zahl beschriftet ist. 3

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen

Aufgabe 1 **Aufgaben Seite 43**

1.1 Da $E(X) = n \cdot p = 10$ $(50 \cdot 0{,}2 = 10)$ ganzzahlig ist, muss der maximale Wert $P(X = 10)$ sein.

Abbildung 3 erfüllt dies nicht. Nur für $p = 0{,}5$ ist die Binomialverteilung symmetrisch, so dass für $p = 0{,}2$ nur Abbildung 2 möglich ist.

1.2 Da $E(X) = n \cdot p = 10$, sind die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von 9, 10 oder 11 statisch aufgeladenen Elektrobauteilen aufzusummieren.

Aus der Abb. 2 liest man

$0{,}14 + 0{,}14 + 0{,}13 = 0{,}41$ ab, also ca. 40 % Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2

2.1 Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl defekt ist.

$P(\text{defekt}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{50} + \frac{4}{500} = \frac{7}{250}$

Die Wahrscheinlichkeit einen defekten Stuhl ausgewählt zu haben beträgt $\frac{7}{250}$.

2.2 Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl in der Stadt A hergestellt worden ist.

$$P_d(A) = \frac{P(A \cap d)}{P(d)} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{7}{250}} = \frac{5}{7}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der defekte Stuhl aus A kommt, beträgt $\frac{5}{7}$.

Aufgabe 3 **Aufgaben Seite 44**

3.1 Die Summe der Wahrscheinlichkeiten beträgt

$0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}35 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1{,}1 > 1$.

3.2 Mit $a = P(X = 1)$ und $b = P(X = 2)$ ergibt sich

Summe Einzelwahrscheinlichkeiten: I. $0{,}2 + a + b + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$

Erwartungswert: II. $a + 2b + 0{,}6 + 0{,}4 = 1{,}7$

Vereinfachung: I. $a + b = 0{,}5$

II. $a + 2b = 0{,}7$

II. − I. ergibt $b = 0{,}2$

einsetzen ergibt $a = 0{,}3$

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen

Aufgabe 4 **Aufgaben Seite 44**

4.1 X gibt die Anzahl unzufriedener Mitarbeiter/-innen an.

A: $P(X = 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) = 0{,}78 - 0{,}62 = 0{,}16$

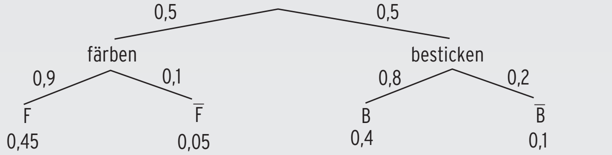
B: $P(X < 8) \approx 0{,}9$

C: $P(X \leq 5) \approx 0{,}62$

4.2 Da die Wahrscheinlichkeit maximal 2 unzufriedene Mitarbeiter/-innen bei $p = 0{,}25$ zu haben mit $P(X \leq 2) \approx 0{,}1$ ungefähr 10 % beträgt, kann mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit
davon ausgegangen werden, dass die Zufriedenheit gesteigert wurde.

Aufgabe 5 **Aufgaben Seite 45**

5.1 Baumdiagramm



F = Färbung ok, $\overline{F}$ = Färbung fehlerhaft, B = Korrekt bestickt, $\overline{B}$ = fehlerhaft bestickt

5.2 Durchschnittlich zu erwartender Stückdeckungsbeitrag

Sei X die Zufallsgröße, die den Stückdeckungsbeitrag beschreibt.

$E(X) = 2 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}05 + 2{,}5 \cdot 0{,}4 - 1 \cdot 0{,}1 - 0{,}2 = 1{,}65$

Der zu erwartende Stückdeckungsbeitrag beträgt 1,65 GE.

Aufgabe 6

6.1 Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: $\binom{5}{3} p^3 \cdot (1 - p)^2$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: $p^2 \cdot \binom{3}{1} p \cdot (1 - p)^2$

6.2 Das Ergebnis "Wappen" ist wahrscheinlicher, da gilt: $0{,}216 > 0{,}5^3 = 0{,}125$
oder $\sqrt[3]{0{,}216} = 0{,}6$.

Aufgabe 7 **Aufgaben Seite 46**

7.1 Die Zufallsvariable ist binomialverteilt:

Für jedes Teil gibt es nur zwei Möglichkeiten, nämlich entweder defekt oder nicht defekt. Es wird zwar ohne Zurücklegen gezogen, aber da die Grundgesamtheit sehr groß und die Stichprobe verhältnismäßig klein ist, bleibt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Zug gleich.

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen

Aufgabe 7 Fortsetzung **Aufgaben Seite 46**

7.2 $P(E) = 0{,}8^2 = 0{,}64$

7.3 A: die ersten zehn Teile sind fehlerhaft.

B: es werden 50 Teile gezogen, davon sind genau 10 fehlerhaft. $\left(\binom{50}{40} = \binom{50}{10}\right)$

Aufgabe 8

8.1 Es ergibt sich die Vierfeldertafel:

	weiblich	männlich	
Physik	0,2	0,3	0,5
Biologie	0,4	0,1	0,5
	0,6	0,4	1

8.2 Mit dem Satz von Bayes ergibt sich:

$P_w(Ph) = \frac{P(Ph \cap w)}{P(w)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$

$P_{Bio}(m) = \frac{P(Bio \cap m)}{P(Bio)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5}$

Alternativ können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten aus einem Baumdiagramm entnommen werden.

Aufgabe 9

FF: falsche Form; RF: richtige Form

FG: fehlerhaftes Gewinde; RG: fehlerfreies Gewinde

Gegeben: $P(FF) = 0{,}05$; $P_{FF}(FG) = 0{,}4$; $P(RF \cap RG) = 0{,}90$

Gesucht: $P_{FG}(FF)$

$P_{FF}(FG) = 0{,}4$ $\quad P_{FF}(FG) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FF)} = 0{,}4$

$P(FF \cap FG) = 0{,}05 \cdot 0{,}4 = 0{,}02$

Aufstellen einer Vierfeldertafel:

Nach Aufgabe: 0,90; 0,05

40 % von 0,05 $\triangleq$ 0,02

	FF	RF	gesamt
FG	0,02	0,05	0,07
RG	0,03	0,90	0,93
gesamt	0,05	0,95	1

$P_{FG}(FF) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FG)} = \frac{0{,}02}{0{,}07} = \frac{2}{7}$

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen

Aufgabe 10 Aufgaben Seite 47

10.1 0,9405 + 0,0015 = 0,942 und 0,0095 + 0,0485 = 0,058 .

	Flasche angenommen	Flasche abgewiesen	
Flasche einwandfrei	0,9405	0,0095	0,95
Flasche deformiert	0,0015	0,0485	0,05
	0,9420	0,058	1

10.2 Mit einer Wahrscheinlichkeit von 94,2 % wird eine Flasche von der Maschine angenommen und mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,8 % wird eine Flasche von der Maschine abgewiesen.

10.3 Man teilt den Anteil der abgewiesenen einwandfreien Flaschen durch den Anteil aller abgewiesenen Flaschen. Das ergibt: $\frac{0,0095}{0,0095 + 0,0485}$.

Aufgabe 11

X: Anzahl der defekten Smartphones unter 50 Smartphones;

X ist $B_{50;0,04}$- verteilt

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= \binom{50}{0} \cdot 0,04^0 \cdot 0,96^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0,04^1 \cdot 0,96^{49}$$

Aufgabe 12 Aufgaben Seite 48

a) P(nur den letzten) = $0,2^3 \cdot 0,8 = \frac{4}{625} = 0,0064$

P(mindestens einen) = 1 – P(keinen) = $1 - 0,2^4 = 0,9984$

b) $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0,8^b \cdot a^2$ für k = 8; a = 0,2; b = 8

Ereignis C: Der Spieler hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80 % und verwandelt 8 von 10 Strafstößen.

Aufgabe 13

x_i	2 €	3 €	4 €
Gewinn	- 1 €	0 €	1 €
$P(X = x_i)$	0,375	0,375	0,25

Erwartungswert für den Gewinn: $E(X) = -1 \cdot 0,375 + 1 \cdot 0,25 = -0,125$

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen

Aufgabe 14

Aufgaben Seite 48

a) 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

$P(\text{keine gelbe Kugel}) = 0{,}8^3 = \frac{64}{125} = 0{,}512$

b) 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen

$P(\text{gleiche Farbe}) = P(rr) + P(ww) + P(gg) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{45} \approx 0{,}31$

Aufgabe 15

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$ A: Nils zieht genau 3 Gewinnlose.

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

B: Nils zieht 2 oder 3 Gewinnlose.

c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$ C: Nils zieht mindestens ein Gewinnlos.

d) $14 \cdot 0{,}05$ Durchschnittlich zu erwartende Anzahl von Gewinnlosen unter 14 Losen

Aufgabe 16

Aufgaben Seite 49

X ist binomialverteilt mit n = 10; p = 0,8

a) $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

Ablesen ergibt den Näherungswert: $0{,}30 + 0{,}27 + 0{,}11 = 0{,}68$

b) $P(X = 0) = 0{,}2^{10}$

Abschätzung: $0{,}2^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{10^{10}} = \frac{1024}{10\,000\,000\,000} = \frac{1{,}024}{10\,000\,000}$

$$0{,}2^{10} = \frac{0{,}1024}{1\,000\,000} < \frac{1}{1\,000\,000}$$

Aufgabe 17

a) $P(X = 4) = 1 - 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$

Erwartungswert von X: $E(X) = 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}5 = 4{,}4$

b) Das Produkt 12 kann hier auf zwei Möglichkeiten erreicht werden: 2;6 und 6;2.

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:

$P(12) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}30$

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen

Aufgabe 18

Aufgaben Seite 50

(1) P(„mindestens eine schwarze Kugel") = 1 – P(„keine schwarze Kugel")

P(„mindestens eine schwarze Kugel") = $1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der mindestens eine schwarze Kugel gezogen wird, beträgt 90%.

(2) Anhand der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann der Erwartungswert $\mu = E(X)$ berechnet werden:

k	0	1	2
P(X = k)	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}6$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0{,}3$

$\mu = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 1{,}2$

Der Erwartungswert μ der Zufallsgröße X beträgt 1,2.

Aufgabe 19

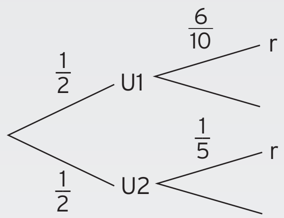
1.1 P („beide Kugeln haben die gleiche Farbe") = P(rr) + P(bb)

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$$

1.2 Mithilfe eines Baumdiagramms erhält man:

$$P(E_2) = \frac{P(U1 \wedge r)}{P(r)}$$

$$P(E_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$



Aufgabe 20

a) Ziehen ohne Zurücklegen; $P = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}$

b) Berechnung über das Gegenereignis: keine der drei aufgedeckten Karten ist mit einer geraden Zahl beschriftet; Ziehen ohne Zurücklegen

$P = 1 - \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}$

II Teil B der Abiturprüfung mit Hilfsmittel – GTR/CAS

Stichwortverzeichnis

Sie finden folgende Themen u. a. in der angegebenen Aufgabe zur Abiturvorbereitung im Aufgabenteil II bis Aufgabenteil IV ab Seite 57

1 Analysis

Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung

Gesamtkostenfunktion K mit	$K(x) = K_v(x) + K_f$
Ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit	$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ a > 0;\ x \geq 0$
K wächst degressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) < 0$
K wächst progressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) > 0$
Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
Funktion der gesamten Stückkosten k	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
Funktion der variablen Stückkosten k_v (k_{var})	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
Grenzkostenfunktion	$K'(x)$ Kostenzuwachs
Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
Betriebsoptimum (Minimalstelle von k)	x_{BO}
Langfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BO})$
Betriebsminimum (Minimalstelle von k_v)	x_{BM}
kurzfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BM})$
Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion)	$p_N(x)$
Angebotsfunktion	$p_A(x)$
Gleichgewichtsmenge (Schnittstelle von p_N und p_A)	x_G
Gleichgewichtspreis	$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
Marktgleichgewicht MG	$MG(x_G \mid p_G)$
Konsumentenrente	$KR = \int_0^{x_G} p_N(x)dx - x_G \cdot p_G$
Produzentenrente	$PR = x_G \cdot p_G - \int_0^{x_G} p_A(x)\,dx$
Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x$; p Preis pro ME $E(x) = p_N(x) \cdot x$ $p_N(x)$; Preis abhängig von x
Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
Gewinnschwelle	x_{GS} 1. positive Nullstelle von G
Gewinngrenze	x_{GG} 2. positive Nullstelle von G
gewinnmaximale Ausbringungsmenge Maximalstelle von G(x)	x_{max}
Cournot'scher Punkt	$C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$
Stückdeckungsbeitrag d = dB	$dB(x) = p - k_v(x)$
Deckungsbeitrag D = DB	$DB(x) = G(x) + K_f = E(x) - K_v(x)$

Bezeichnungen: $\mathbb{R}^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $\mathbb{R}_+^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^{>0}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \mathbb{R}^{\geq 0}$

Produktregel der Ableitung: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 115**

Das Ein-Liter-Auto ist kaum noch ein Thema. Niemand dürfte bereit sein, mehrere 10 000 Euro für ein eigenes Gefährt zu zahlen. Eine mögliche Zwischenlösung wird künftig wohl in einem Zwei- oder Drei-Liter-Auto gesehen.
Insgesamt gilt: ME gleich Mengeneinheiten und GE gleich Geldeinheiten.
Der Autozulieferbetrieb Dynamik baut unter anderem für ein Zwei-Liter-Auto in einem zweistufigen Produktionsprozess aus verschiedenen elektronischen Bauteilen (B1, B2 und B3) Fahrdynamikregelung, Motorsteuergerät und Bordcomputer (E1, E2, E3).
Die folgenden Listen geben Auskunft über die Zusammenhänge zwischen den Bauteilen und den Zwischen- bzw. Endprodukten in ME.

	Z1	Z2	Z3
B1	1	0	3
B2	5	2	12
B3	50	15	95

	E1	E2	E3
Z1	2	3	2
Z2	0	4	3
Z3	1	5	1

Kosten der Bauteile in GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte in GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte in GE/ME		
B1	B2	B3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3
0,03	0,02	0,01	1,5	2,5	2,5	10	15	20

1.1 Aus den obigen Angaben ergibt sich die folgende Bauteile-Endproduktmatrix:

$$M_{BE} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & b \\ 195 & a & 240 \end{pmatrix}$$

1.1.1 Berechnen Sie die Werte für a und b. 5

1.1.2 Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente a und b im Sachzusammenhang. 5

Im Folgenden sei a = 685 und b = 28.

1.2 Die Fixkosten der Wochenproduktion betragen 7 525 GE. 8
Berechnen Sie die Gesamtkosten für eine Wochenproduktion von 750 ME von E1, 900 ME von E2 und 500 ME von E3.

1.3 Kurz vor den Betriebsferien meldet das Lager einen Bestand an Zwischenprodukten von Z1 mit 4 300 ME, Z2 mit 4 250 ME und Z3 mit 4 950 ME.

1.3.1 Untersuchen Sie, wie viele Endprodukte mit diesem Lagerbestand noch vor den Betriebsferien produziert werden können. 8

1.3.2 Begründen Sie, dass es trotz höheren Rechenaufwands sinnvoll sein kann, zunächst die Inverse der Verflechtungsmatrix M_{ZE} zu bestimmen. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 2/2** **Punkte**

1.4 Das Unternehmen Dynamik staffelt seine Preise der Endprodukte nach Auftrag und Kunde. Den Kunden werden bestimmte Rabattkategorien r mit $r \in \mathbb{N}$ zugeordnet – guten Kunden wird eine höhere Kategorie zugeordnet.
Es gilt folgender Preisvektor:
$e_r^T = (26{,}54 - 0{,}5r \quad 69{,}55 - 1{,}5r \quad 49{,}61 - r)$

1.4.1 Berechnen Sie, für welche $r > 0$ die einzelnen Preise ökonomisch sinnvoll sind. 7

1.4.2 Die Gesamtkosten in Höhe von 85 055 GE bei der Wochenproduktion von 750 ME von E1, 900 ME von E2 und 500 ME von E3 sollen trotz Rabatt mindestens gedeckt werden. 7
Leiten Sie den Bereich für r her, der dieser Anforderung genügt.
(Berufskolleg NRW 2011.) 45

Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Lösung Seite 116**

Punkte

BioKosmetiKuss stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus pflanzlichen Rohstoffen (R1, R2 und R3) Zwischenprodukte (Z1, Z2 und Z3) und aus diesen wiederum verschiedene Parfums (E1, E2 und E3) her.
Die folgenden Matrizen geben die benötigten pflanzlichen Rohstoffe je Zwischenprodukt bzw. Zwischenprodukte je Endprodukt (Parfum) in ME an.

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix} \qquad B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix};\ a, b, c \geq 0$$

Für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt in der aktuellen Produktionsperiode:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$$

3.1 Bei der Produktion der Zwischenprodukte und der Parfums treten produktionsbedingte Parameter a, b und c auf, die in den einzelnen Produktionsperioden variieren können.

3.1.1 Berechnen Sie die Werte für a, b und c für die aktuelle Produktionsperiode. 5

3.1.2 Deuten Sie Ihre Ergebnisse aus 3.1.1 im Sachzusammenhang. 3

3.1.3 Stellen Sie die betriebliche Materialverflechtung in Form eines Gozintographen (Verflechtungsdiagramm) dar. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 2 **Seite 2/2** **Punkte**

Im Folgenden seien a = 4, b = 2 und c = 0.

3.2 Folgende Kosten fallen an:

Kosten der pflanzlichen Rohstoffe in GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte in GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte in GE/ME		
R1	R2	R3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3
4,5	2,8	3,2	8,5	5	6,5	3	2,5	4

Die fixen Kosten einer Wochenproduktion betragen 5000 GE.

3.2.1 Bestimmen Sie die variablen Kosten je ME der Parfums E1, E2 und E3. 8

3.2.2 Aus produktionstechnischen Gründen werden die Parfums E1, E2 und E3 im Verhältnis 1 : 2 : 4 hergestellt. Ermitteln Sie, wie viele ME der Parfums E1, E2 und E3 produziert werden, wenn die Gesamtkosten 47 232 GE pro Woche betragen. (Berufskolleg NRW 2013.) 5

Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Lösung Seite 118**

Das Unternehmen Argoline produziert Spielzeug. Ganz neu zum Sortiment gehört das Stecksystem Argoline3D, das den leichten Zusammenbau auch komplexer Modelle ermöglicht.

Das Spielsystem Argoline3D besteht im wesentlichen aus den Grundelementen V1 (Verbindungswürfel), S1 (Stecker), P1 (Platte) und R1 (Rohr).

1 In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus den Grundelementen V1, S1, P1 und R1 die Wandteile W1 und W2 gefertigt und die Beutel B mit 100 Steckern S1 gepackt, da man viele Stecker S1 benötigt, um Wände zusammenzusetzen.
In der zweiten Produktionsstufe werden daraus die häufig nachgefragten Modelle Haus und Turm hergestellt.

Grundelement - Zwischenprodukt

	W1	W2	B
V1	12	9	0
S1	34	24	100
R1	17	12	0
P1	6	4	0

Zwischenprodukt - Endprodukt

	Haus	Turm
W1	12	12
W2	16	34
B	3	4

1.1 Berechnen Sie die Matrix, die die Anzahl der Grundelemente je Endprodukt Haus und Turm angibt.

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 3 **Seite 2/2**

1.2 Zum Osterfest bestellt ein Warenhaus 800 Stück des Modells Haus und 500 Stück des Modells Turm.
Berechnen Sie die Anzahl der für diesen Auftrag zu produzierenden Zwischenprodukte und den Bedarf an Grundelementen.

1.3 Berechnen Sie mit Hilfe der unten angegebenen Kosten- und Preisangaben den Gewinn des Osterauftrags.

Produktionskosten je Grundelement in EUR			
V1	S1	R1	P1
0,04	0,01	0,03	0,02

Produktionskosten je Zwischenprodukt in EUR		
W1	W2	B
0,30	0,20	0,05

Verpackungskosten pro Modell in EUR		Fixkosten in EUR	Verkaufspreis in EUR	
Modell Haus	Modell Turm	1500,00	Modell Haus	Modell Turm
0,50	0,60		50,00	75,00

2 Nach dem Osterverkauf soll das Lager wegen Renovierungsarbeiten kurzfristig geräumt werden. Es befinden sich noch 600 Stück W1, 1340 Stück W2 und 180 Beutel B im Lager.

2.1 Erläutern Sie allgemein, wie man anhand der Rangkriterien auf die Anzahl der Lösungen bei einem inhomogenen linearen Gleichungssystem schließen kann.

2.2 Beurteilen Sie, ob der Lagerbestand durch die Produktion der Modelle Haus und Turm aufgebraucht werden kann.

3 Ein Einzelhändler möchte kurzfristig eine größere Menge der Modelle Haus und Turm bestellen. Dabei sollen doppelt so viele Exemplare des Modells Turm wie des Modells Haus geliefert werden. Zum Zeitpunkt der Bestellung besteht mit 40500 Stück ein Lagerengpass an Rohren (R1). Von den anderen Grundelementen, Verbindungswürfel (V1), Platten (P1) und Stecker (S1), sind noch ausreichende Mengen vorhanden.
Zeigen Sie, dass unter den gegebenen Bedingungen maximal ein Erlös von 5000,00 € erzielt werden kann, wenn weiterhin für das Modell Haus ein Verkaufspreis von 50,00 € und für das Modell Turm von 75,00 € gilt.
(Nach Berufskolleg NRW 2010.)

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 4 **Seite 1/2** **Lösung Seite 120**

Punkte

Die Bio-Kosmetic ist ein Unternehmen der Kosmetikbranche, das aus ökologisch produzierten Grundstoffen hochwertige Pflegeprodukte herstellt. Sie beliefert Bioläden und eine große Drogeriekette. Insgesamt gilt: ME gleich Mengeneinheiten, GE gleich Geldeinheiten. Das Unternehmen Bio-Kosmetic stellt aus den Rohstoffen Milch, Lanolin, Rosenöl und Jojobaöl drei Grundkomponenten (G1 bis G3) her. Aus diesen werden zwei Markencremes hergestellt: Handcreme (H) und Faltencreme (F).

1 Bio-Kosmetic erhält von einer großen Drogeriekette den Auftrag, 100 ME von der Handcreme und 150 ME von der Faltencreme zu liefern. 5

Es gelten folgende Mengenbeziehungen:

	G1	G2	G3
Milch	20	15	10
Lanolin	1	2	0,5
Rosenöl	3	0	2
Jojobaöl	0	1	2

	H	F
G1	1	3
G2	5	0
G3	2	5

Der Betrieb hat einen Lagerbestand von 30000 ME Milch, 2000 ME Lanolin, 3000 ME Rosenöl und 4000 ME Jojobaöl. Prüfen Sie, ob mit diesem Lagerbestand der Auftrag erfüllt werden kann und bestimmen Sie gegebenenfalls, wie viele Mengeneinheiten der einzelnen Rohstoffe nachbestellt werden müssen.

2 Die Drogeriekette zahlt für jede ME der Handcreme 300 GE und für jede ME der Faltencreme 500 GE. 7

Dem Unternehmen Bio-Kosmetic entstehen folgende Kosten je ME bei der Herstellung:

Rohstoffkosten je ME				Fertigungskosten je ME der Grundkomponenten			Fertigungskosten je ME der Handcreme bzw. Faltencreme	
Milch	Lanolin	Rosenöl	Jojobaöl	G1	G2	G3	Handcreme	Faltencreme
0,2 GE	1 GE	15 GE	8 GE	0,5 GE	1 GE	3 GE	2,5 GE	2 GE

Zusätzlich fallen noch fixe Kosten in Höhe von 15750 GE an. Berechnen Sie den Gewinn für den Auftrag der Drogeriekette über 100 ME der Handcreme und 150 ME der Faltencreme.

3 Der leitende Chemiker will eine neue Rezeptur für die Grundkomponenten ausprobieren und den Anteil der Milch in den Grundkomponenten verändern, während der Gesamtmilchgehalt gleich bleiben soll, also:

	G1	G2	G3
Milch	a	b	c
Lanolin	1	2	0,5
Rosenöl	3	0	2
Jojobaöl	0	1	2

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 4 **Seite 2/2** **Punkte**

3 Die anderen Mengenbeziehungen bleiben unverändert, also:

	H	F
G1	1	3
G2	5	0
G3	2	5

	H	F
Milch	115	110
Lanolin	12	5,5
Rosenöl	7	19
Jojobaöl	9	10

3.1 Zeigen Sie, dass die benötigten Milchmengen pro Grundkomponente durch das folgende lineare Gleichungssystem bestimmen werden können: 4

$$\begin{aligned} & a + 5b + 2c = 115 \\ \wedge\ & 3a + \phantom{5b + {}} 5c = 110 \end{aligned}$$

3.2 Beurteilen Sie die Lösbarkeit des Gleichungssystem mithilfe des Rangkriteriums. 5

3.3 Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems. 5

3.4 Eine mögliche Schreibweise des Lösungsvektors des Gleichungssystems lautet: 5

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{110}{3} \\ \frac{47}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{15}t \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie den produktionstechnisch sinnvollen Bereich für t her.

(Berufskolleg NRW 2010.)

Aufgabe 5 **Seite 1/3** **Lösung Seite 121**

Die PlantGrow AG stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess Blumensamenmischungen für den Direktvertrieb an Endverbraucher her.

1.1 In einer ersten Produktionsstufe werden aus vier Samenarten S1, S2, S3 und S4 drei verschiedene Tütenmischungen T1, T2 und T3 hergestellt, die in der zweiten Produktionsstufe zu zwei verschiedenen Verkaufsverpackungen V1 und V2 zusammengestellt werden. Die Mengeneinheiten (ME) der Samenarten und Tütenmischungen, die jeweils für eine ME der Tütenmischungen bzw. Verkaufsverpackungen benötigt werden, sind in den unten stehenden Matrizen A_{ST}, B_{TV} und C_{SV} angegeben.

$$A_{ST} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ b & 0 & 6 \end{pmatrix},\ B_{TV} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ c & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } C_{SV} = \begin{pmatrix} 10 & 28 \\ 5 & 13 \\ 10 & 16 \\ 13 & 34 \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 5 **Seite 2/3** **Punkte**

1.1.1 Berechnen Sie die Zahlenwerte für a, b und c. 6

1.1.2 Ergänzen Sie die graphische Darstellung des zweistufigen Produktionsprozesses (Gozintograph) in Anlage 1 mit den entsprechenden Zahlenwerten. 5

1.3 Zur Sommersaison sollen doppelt so viele Verkaufsverpackungen von V1 wie von V2 je Woche hergestellt werden. Gleichzeitig stehen durch einen Engpass bei den Samenarten von S1 nur 1 500 ME und von S2 nur 550 ME je Woche zur Verfügung. Von S3 und S4 sind genügend Mengeneinheiten im Lager vorrätig. Ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten der Verkaufsverpackungen von V1 und V2 unter diesen Bedingungen maximal je Woche hergestellt werden können. 8

1.2 Aus Kostengründen ist das Mischungsverhältnis der Tütenmischungen geändert worden, so dass jetzt nur noch die drei Samenarten S1, S2 und S3 zu drei Tütenmischungen T1, T2 und T3 verarbeitet werden, aus denen die beiden Verkaufsverpackungen V1 und V2 produziert werden.

Für die neuen Mengenangaben gelten folgenden Matrizen: $\overline{A}_{ST} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\overline{C}_{SV} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 6 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$

Für die Inverse von $\overline{A}_{ST}$ gilt: $\overline{A}_{ST}^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 16 & -4 \\ -1 & -6 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

Die Kosten je ME in GE lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Kosten für Samenarten			Fertigungskosten 1. Stufe zu Tüten			Fertigungskosten 2. Stufe zu Verkaufsverpackungen	
S1	S2	S3	T1	T2	T3	V1	V2
2	1	0,5	3	2	3,5	4	3

Für die Verkaufspreise in GE je ME gilt:

Verkaufspreise	
V1	V2
70	65

1.2.1 Leiten Sie aus den obigen Matrizen die Matrix $\overline{B}_{TV} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ her,

die den Verbrauch an Tütenmischungen je ME der Verkaufsverpackungen angibt. 8

1.2.2 Berechnen Sie den Stückdeckungsbeitrag in GE/ME der Verkaufsverpackungen V1 und V2. 10

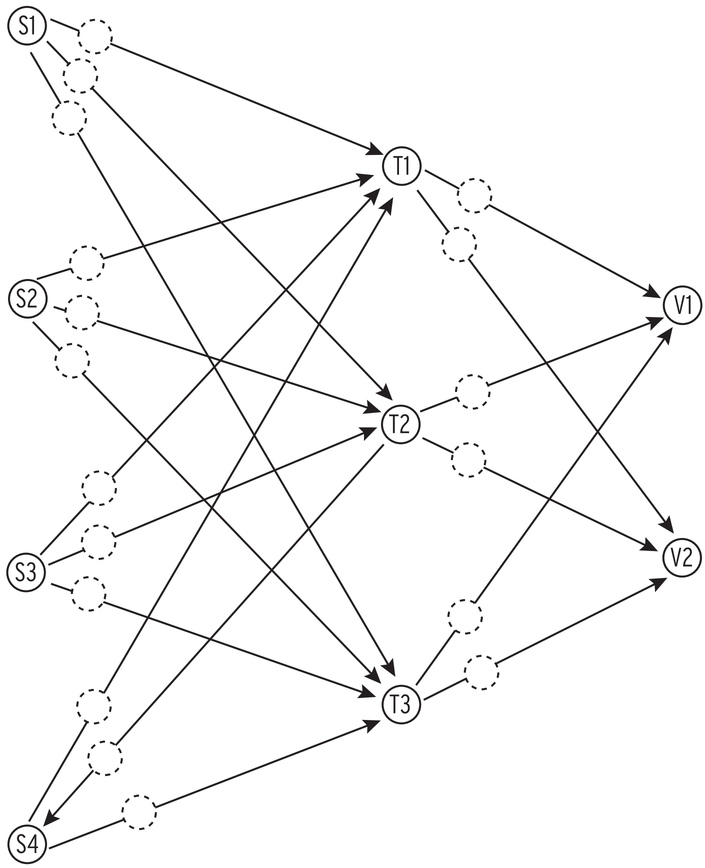
Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 5	Seite 3/3	Punkte

1.2.3 Zur Sommersaison sollen doppelt so viele Verkaufsverpackungen von V1 wie von V2 je Woche hergestellt werden. Gleichzeitig stehen durch einen Engpass bei den Samenarten von S1 nur 1 500 ME und von S2 nur 550 ME je Woche zur Verfügung. Von S3 sind genügend Mengeneinheiten im Lager vorrätig.
Ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten der Verkaufsverpackungen von V1 und V2 unter diesen Bedingungen maximal je Woche hergestellt werden können. 8

(Berufskolleg NRW 2014)

Anlage 1



Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 6 **Lösung Seite 123**

Punkte

Das Unternehmen BIOSAFT produziert Smoothies in einem zweistufigen Produktionsprozess zunächst aus den Rohstoffen Obst (R1), Gemüse (R2) und Wasser (R3) die Zwischenprodukte Obstbasis (Z1), Gemüsebasis (Z2) und eine fruchtige Wasserbasis (Z3), die in einem zweiten Produktionsschritt zu den Endprodukten Obst-Smoothie (E1), Grüner-Smoothie (E2) und Obst-Gemüse-Smoothie (E3) verarbeitet werden.
Folgende Produktionsmengen in Mengeneinheiten (ME) seien bekannt:

$$B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C_{RE} = \begin{pmatrix} 34 & 18 & 26 \\ 11 & 28 & 21 \\ 8 & 18 & 36 \end{pmatrix}.$$

1.1 Interpretieren Sie das Element b_{31} der Matrix B_{ZE} anwendungsbezogen.
Bestimmen Sie die fehlende Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A_{RZ}.
Stellen Sie den gesamten Produktionsprozess in einem Verflechtungsdiagramm dar. 8

1.2 Der Discounter OLDI überlegt die Smoothies von BIOSAFT in sein Sortiment aufzunehmen und bietet dem Produzenten je Mengeneinheit Obst-Smoothie einen Preis von 30 Geldeinheiten (GE) und je Mengeneinheit Grüner-Smoothie einen Preis von 27 GE an. Der Auftrag umfasst 500 ME Obst-Smoothie und 200 ME Grüner-Smoothie.
BIOSAFT möchte den Auftrag kalkulieren. Folgende Informationen bezüglich der Produktionskosten sind bekannt:

Rohstoffkosten in GE/ME		Herstellungskosten in GE/ME		Verarbeitungskosten in GE/ME	
R1	0,6	Z1	0,5	E1	0,9
R2	0,4	Z2	0,5	E2	0,8
R3	0,1	Z3	0,2	E3	1,1

Bestimmen Sie die variablen Stückkosten je Endprodukt.
Berechnen Sie die variablen Kosten für diesen Auftrag.
Begründen Sie nachvollziehbar, ob BIOSAFT den Auftrag annehmen sollte, wenn die Fixkosten für diesen Auftrag 550 GE betragen. 8

(Berufskolleg NRW 2016.)

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 7 **Seite 1/2** **Lösung Seite 124** **Punkte**

Das Unternehmen BEL FRUTI verarbeitet u. a. Papayas und Ananas und füllt sie in Konservendosen ab. Um entsprechende Rabatte zu erhalten, müssen mindestens 50 Mengeneinheiten (ME) Ananas pro Tag geordert werden. Die Früchte werden zunächst auf der Maschine M_1 gewaschen und geschält. Die Maschine muss regelmäßig gereinigt werden, so dass sie nur 19 Stunden pro Tag eingesetzt werden kann. Die Früchte werden anschließend auf einer zweiten Maschine M_2 portioniert und danach auf der Maschine M_3 in Dosen verfüllt.

3.1 Die Produktionsleitung soll die Verarbeitungsmengen von Papayas und Ananas bestimmen, die zu einem maximalen Deckungsbeitrag in GE führen. Alle zur Lösung erforderlichen Informationen sind den nachfolgenden Tabellen zu entnehmen:

	Papaya Minuten/ME	Ananas Minuten/ME	Maximale Auslastung Minuten/Tag
M_1	2	3	1140
M_2	1,5	3	900
M_3	1	1	450

	Papaya	Ananas
Mindestbestellmenge in ME	0	50
Stückdeckungsbeiträge in GE/ME	0,6	1

3.1.1 Zeigen Sie, dass zur Lösung des Optimierungsproblems die nachfolgenden Bedingungen gelten (x_1 = ME Papayas und x_2 = ME Ananas): $x_1, x_2 \geq 0$ 6

$x_2 \geq 50$ $\quad$ $x_2 \leq -\frac{2}{3}x_1 + 380$

$x_2 \leq -0{,}5x_1 + 300$ $\quad$ $x_2 \leq -x_1 + 450$

3.1.2 Zeichnen Sie mit den vorgegebenen Angaben aus 1.1.1 den zur graphischen Lösung des Optimierungsproblems erforderlichen Planungsbereich in das Koordinatensystem in Anlage 1. 6

3.1.3 Bestimmen Sie die jeweilige Verarbeitungsmenge für Papayas und Ananas, um den Deckungsbeitrag zu maximieren. 5

3.1.4 Berechnen Sie den maximalen Deckungsbeitrag sowie die Auslastungszeiten der Maschinen. 6

3.1.5 Begründen Sie, dass es keine Mengenkombination gibt, bei der die maximal mögliche Laufzeit der Maschine 1 M voll ausgenutzt wird, ohne die anderen Restriktionen zu verletzen. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 7 **Seite 2/2** **Punkte**

3.2 Die Produktionspalette wird um Mangokonserven erweitert. Die zur Verfügung stehenden Maschinenzeiten bleiben erhalten, die Mindestbestellmenge entfällt. An Maschine 1 benötigen die Mangos 2 Minuten/ME. An den Maschinen 2 und 3 benötigen die Mangos je 1 Minute/ME. Der Stückdeckungsbeitrag je ME der Mangos beträgt 1,5 GE. Mit Hilfe des Simplex-Algorithmus soll die optimale Bestellmenge zur Maximierung des Deckungsbeitrags ermittelt werden.

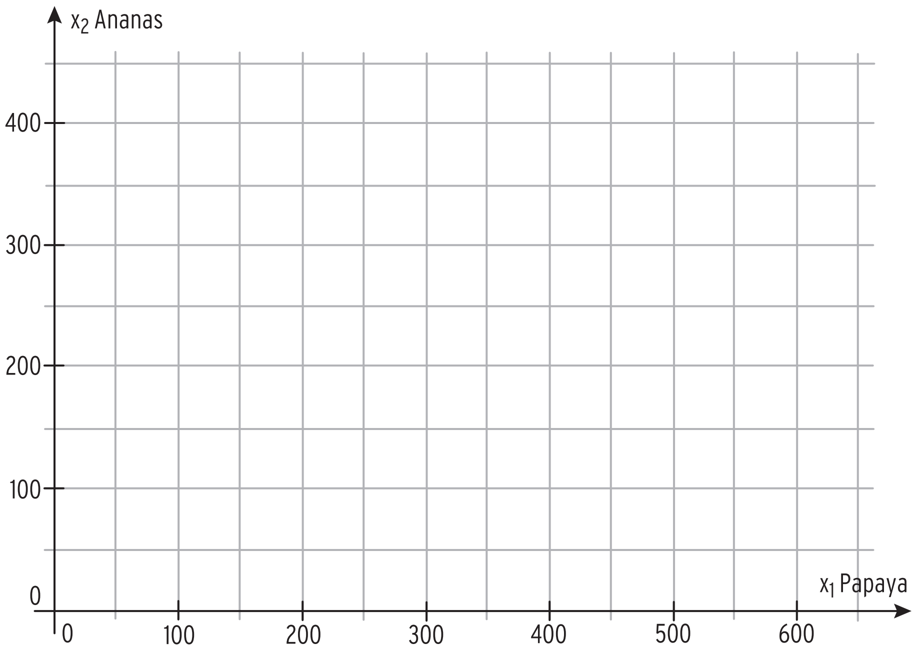
3.2.1 Bestimmen Sie mit Hilfe der Angaben in 3.1 und 3.2 das Starttableau (1. Tableau) zur Lösung des Optimierungsproblems, welches zur Anwendung des Simplex-Algorithmus benötigt wird. 6

3.2.2 Leiten Sie durch Anwendung des Simplex-Algorithmus nur das dem Starttableau folgende Tableau (2. Tableau) her. 6

3.2.3 Interpretieren Sie das von Ihnen in 3.2.2 hergeleitete Tableau in Bezug auf die Produktionszahlen, die Auslastung der Maschinen sowie den Deckungsbeitrag und weiterer Optimierungsmöglichkeiten. 6

(Berufskolleg NRW 2012.)

Anlage 1: Koordinatensystem für Aufgabe 3.1.2



Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 8 **Lösung Seite 126** **Punkte**

Das Unternehmen SolisE stellt auf ihren Maschinen M1, M2 und M3 unter anderem zwei verschiedene Arten von Solarmodulen her: Soleco1 und Soleco2.
Die folgende Tabelle zeigt je Maschine die Bearbeitungszeit der Solarmodule und die maximal zur Verfügung stehende Maschinenlaufzeit in einem Produktionszeitraum.

Maschine	Bearbeitungszeit in Minuten je ME		Zur Verfügung stehende Maschinenlaufzeit in Minuten
	Soleco1	Soleco2	
M1	1	3	120
M2	2	4	180
M3	3	1	240

Für Soleco1 beträgt der Stückdeckungsbeitrag 24 GE/ME und für Soleco2 16 GE/ME.

2.1 SolisE untersucht den Deckungsbeitrag in Abhängigkeit von den Produktionszahlen.

2.1.1 Zeichnen Sie zu den gegebenen Bedingungen den zulässigen Produktionsbereich für die Produktionsmengen von Soleco1 und Soleco2 in ein Koordinatensystem. 10

2.1.2 Ermitteln Sie mit Hilfe Ihrer Zeichnung den maximalen Deckungsbeitrag sowie die dazugehörige Mengenkombination der beiden Solarmodule. 6

2.1.3 Damit die Präsenz am Markt sichergestellt ist, sollen mindestens 10 ME von Soleco2 produziert und verkauft werden.
Untersuchen Sie, welche Auswirkungen dies auf den Deckungsbeitrag hat. 6

2.2 Mit Soleco3 soll zusätzlich in einer anderen Produktionsperiode ein drittes Solarmodul in Produktion gehen. Die Herstellung einer Mengeneinheit von Soleco3 benötigt 1 Minute auf M1, 4 Minuten auf M2 und 3 Minuten auf M3. Der Stückdeckungsbeitrag beträgt 30 GE/ME. Die Angaben für Soleco1 und Soleco2 bleiben unverändert. Mit Hilfe des Simplex-Algorithmus sollen der maximale Deckungsbeitrag und die zugehörigen Produktionsmengen bestimmt werden.

2.2.1 Stellen Sie das zugehörige Starttableau (1. Tableau) auf. 6

2.2.2 Berechnen Sie nur das folgende Simplextableau (2. Tableau). 8

2.2.3 Beurteilen Sie, ob aus diesem 2. Tableau bereits die optimalen Produktionsmengen zur Maximierung des Deckungsbeitrags abgelesen werden können. 3

2.2.4 Interpretieren Sie das 2. Tableau in Bezug auf die Produktionszahlen, die Auslastung der Maschinen und den Deckungsbeitrag. 6

(Berufskolleg NRW 2012.) insgesamt: 45

Aufgabe 9 **Lösung Seite 128** **Seite 1/2** **Punkte**

Die Düsseldorfer DüFa GmbH stellt Fahrräder für den anspruchsvollen heimischen Markt her und hat sich dabei auf Rahmen für Cityräder, Trekkingräder und Mountainbikes spezialisiert.
In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus den vier Rohstoffen R1, R2, R3, R4 die Zwischenprodukte Z1, Z2, Z3 und aus diesen die Rahmen (Endprodukte) E1, E2, E3 hergestellt. Die folgenden Matrizen geben die benötigten Mengeneinheiten (ME) der Zwischenprodukte für die Endprodukte und der Rohstoffe für die Endprodukte an.

$$M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}; \qquad M_{RE} = \begin{pmatrix} 16 & 15 & 30 \\ 30 & 28 & 56 \\ 17 & 14 & 29 \\ 15 & 14 & 28 \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung

1.1 Die variablen Kosten in Geldeinheiten (GE) je Mengeneinheit ergeben sich aus den folgenden Tabellen:

Kosten der Rohstoffe:

R1	R2	R3	R4
2	1,5	3	2

Fertigungskosten der Zwischenprodukte:

Z1	Z2	Z3
12	5	8

Fertigungskosten der Endprodukte:

E1	E2	E3
6	18	23

1.1.1 Berechnen Sie die Rohstoffkosten für eine Produktion von 250 ME von E1, 200 ME von E2 und 400 ME von E3. 5

1.1.2 Berechnen Sie die variablen Kosten je Mengeneinheit der Endprodukte. 8

1.2 Die Planungsabteilung sieht aufgrund von vorliegenden Kundenaufträgen für die kommende Produktionsperiode eine Produktion von 100 ME von E1 und 200 ME von E2 sowie einer noch nicht feststehenden Menge von E3 vor. 8
Im Lager befinden sich zur Herstellung der Rahmen E1, E2 und E3 nur noch 1 000 ME von Z1.
Ermitteln Sie, wie viele ME sich von E3 höchstens herstellen lassen und wie viele ME von Z2 und Z3 hierzu benötigt werden.

Aufgabe 9 **Seite 2/2**

1.3 Die Rahmen der Cityräder E1, Trekkingräder E2 und Mountainbikes E3 werden auf den Maschinen M1, M2 und M3 hergestellt.
In der folgenden Tabelle sind die Bearbeitungszeiten in Zeiteinheiten (ZE) pro Mengeneinheit und die maximalen Laufzeiten der Maschinen angegeben.

	E1 (ZE/ME)	E2 (ZE/ME)	E3 (ZE/ME)	max. Laufzeit in ZE
M1	1	2	4	600
M2	5	6	10	1300
M3	1	1	1	200

Als Stückdeckungsbeitrag veranschlagt der Rahmenproduzent 40 GE/ME für E1, 65 GE/ME für E2 und 90 GE/ME für E3.
Die DüFa GmbH möchte den Deckungsbeitrag maximieren.

1.3.1 Leiten Sie aus den obigen Angaben das Starttableau (Anfangstableau) zur Maximierung des Deckungsbeitrags her. Dabei sollen x_1, x_2 und x_3 die jeweiligen Anzahlen der Rahmen E1, E2 und E3 bezeichnen. 6

1.3.2 Begründen Sie, dass das folgende Tableau noch nicht das optimale Tableau ist.

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b
−1	−0,4	0	1	−0,4	0	80
0,5	0,6	1	0	0,1	0	130
0,5	0,4	0	0	− 0,1	1	70
−5	11	0	0	−9	0	Z − 11700

1.3.3 Bestimmen Sie – ausgehend vom Tableau in 1.3.2 – das optimale Tableau mit anschließender Angabe des maximalen Deckungsbeitrags, der Anzahl der zu erstellenden Rahmen und der verbleibenden Maschinenkapazitäten. 10

1.4 Für einen alternativen Produktionsprozess ergibt sich das folgende optimale Tableau: 5

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b
1	−3	0	−0,2	0	−1	20
0	2	1	−0,5	0	2,5	150
0	−0,5	0	−3,5	1	4	110
0	−12	0	−1	0	−8	Z − 14350

Auf der Maschine M2 sollen aufgrund von Produktionsfehlern Teile nachgearbeitet werden. Hierfür werden 150 ZE veranschlagt. Begründen Sie anhand der Daten des Tableaus, ob die Nacharbeiten auf der Maschine M2 ohne Zeitprobleme durchgeführt werden können. insgesamt: 45
(Berufskolleg NRW 2016.)

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 10 **Lösung Seite 128** Punkte

2.4 Die VELOTRITT GmbH produziert leicht modifizierte Fahrradrahmen der Modelle Tour, City und Active unter dem Label einer Fremdmarke. Die Produktion erfolgt in drei Arbeitsgängen an den Maschinen M1, M2 und M3. Der Zeitbedarf für die Herstellung der Rahmen der Modelle sowie die zeitlichen Beschränkungen der Maschinen sind folgender Tabelle zu entnehmen:

	City (h/ME)	Tour (h/ME)	Active (h/ME)	Maximale Laufzeit (h/Woche)
M1	2	1	2	36
M2	1	1	1	22
M3	0	1,5	1	27

Für die Rahmen des Modells City erzielt die VELOTRITT GmbH einen Deckungsbeitrag von 48 GE/ME, bei Tour sind es 64 GE/ME, bei Active sind es 96 GE/ME. Im Folgenden soll untersucht werden, welche Auswirkungen sich bezüglich des Gesamtdeckungsbeitrages und der Auslastung der Maschinen ergeben

2.4.1 Die Untersuchung greift auf den Simplex-Algorithmus zurück. 4
Stellen Sie das Starttableau für den Simplex-Algorithmus auf.
Hinweis: Wählen Sie x_1 für die ME der Rahmen des Modells City und x_2 für die ME der Rahmen des Modells Tour, für die ME der Rahmen Active die Bezeichnung x_3 und für die Schlupfvariablen von M1, M2, M3 entsprechend u_1, u_2, u_3.

2.4.2 Nach Umformung erhält man das folgende Tableau: 6

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
M1	1	0,5	1	0,5	0	0	18
M2	0	0,5	0	− 0,5	1	0	4
M3	− 1	1	0	− 0,5	0	1	9
	− 48	16	0	− 48	0	0	Z − 1728

Leiten Sie hieraus das nächste Tableau her.

2.4.3 Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus 2.4.2 im Hinblick auf die Maximierung des Gesamtdeckungsbeitrags, die optimalen Produktionsmengen sowie auf die Auslastung der Maschinen M1, M2 und M3. 5

(Berufskolleg NRW 2015.)

Aufgabe 11 **Lösung Seite 131**

Punkte

Das Unternehmen Kaffeeduft hat sich auf die Produktion und den Verkauf von Kaffeekapseln und den zugehörigen Kaffeemaschinen spezialisiert.
Die Kapseln zur Kaffeezubereitung werden in den drei Endprodukten Espresso, Grande und Cappuccino angeboten. Espresso soll zukünftig in drei verschiedenen Qualitätsstufen Q_1, Q_2 und Q_3 angeboten werden.
Der Rösterei stehen dazu maximal 600 Minuten pro Tag zur Verfügung.

Qualitätsstufe	Q_1	Q_2	Q_3
Zeitaufwand der Rösterei für eine ME in der jeweiligen Qualitätsstufe in Minuten	2	4	8

Der tägliche Absatz ist beschränkt. Vom Espresso der Qualitätsstufe Q_3 können maximal 15 ME abgesetzt werden, die Absatzmengen in den Qualitätsstufen Q_1 und Q_2 können zusammen 100 ME nicht überschreiten. Das Unternehmen möchte den Gesamtdeckungsbeitrag maximieren.

Qualitätsstufe	Q_1	Q_2	Q_3
Deckungsbeitrag in der jeweiligen Qualitätsstufe in Euro pro ME	45	60	80

1 Geben Sie die Restriktionen und die Zielfunktion des Maximierungsproblems an. 6

2 Ermitteln Sie entsprechend des Simplexverfahrens das Anfangstableau und das darauf folgende Tableau. 8

3 Erläutern Sie, dass es sich bei dem folgenden Tableau um das optimale Tableau handelt.

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
-2	0	0	1	-8	-4	80
0	0	1	0	1	0	15
1	1	0	0	0	1	100
-15	0	0	0	-80	-60	Z - 7200

2

4 Leiten Sie aus dem Tableau in 3 alle für das Unternehmen Kaffeeduft relevanten Informationen her. 5

(Abitur Berufskolleg NRW 2015)

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra Lösungen

Lösung Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 99**

1.1.1 Bauteile-Zwischenprodukt-Matrix M_{BZ}

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix M_{ZE}; Bauteile-Endprodukt-Matrix M_{BE}

Es gilt: $M_{BZ} \cdot M_{ZE} = M_{BE}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 12 \\ 50 & 15 & 95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & b \\ 195 & a & 240 \end{pmatrix}$

Für a und b gilt dann: $a = 50 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 95 \cdot 5 = 685$

$b = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12 \cdot 1 = 28$

Die exemplarische Überprüfung stimmt mit der Vorgabe überein.

1.1.2 a gibt die Anzahl der Bauteile B3 im Endprodukt E2 (Motorsteuergerät) an.

b gibt die Anzahl der Bauteile B2 im Endprodukt E3 (Bordcomputer) an.

1.2 Wochenproduktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix}$

Bauteilekosten je Endprodukt: $(0{,}03 \quad 0{,}02 \quad 0{,}01)\begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & 28 \\ 195 & 685 & 240 \end{pmatrix} = (2{,}54 \quad 9{,}05 \quad 3{,}11)$

Fertigungskosten je Endprodukt: $(1{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (5{,}5 \quad 27 \quad 13)$

Fertigungskosten der Endprodukte: $(10 \quad 15 \quad 20)$

Für die variablen Kosten je Endprodukt gilt:

$(2{,}54 \quad 9{,}05 \quad 3{,}11) + (5{,}5 \quad 27 \quad 13) + (10 \quad 15 \quad 20) = (18{,}04 \quad 51{,}05 \quad 36{,}11)$

Für die Gesamtkosten einer Wochenproduktion gilt:

$(18{,}04 \quad 51{,}05 \quad 36{,}11)\begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix} + 7525 = 85055$

Die Gesamtkosten einer Wochenproduktion betragen 85 055 GE.

1.3 Ansatz: $M_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4300 \\ 4250 \\ 4950 \end{pmatrix}$

Lösung des Gleichungssystems mithilfe der Inversen $M_{ZE}^{-1} = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -7 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \\ 4 & 7 & -8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M_{ZE}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4300 \\ 4250 \\ 4950 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 350 \end{pmatrix}$

Es können noch 600 ME von E1, 800 ME von E2 und 350 ME von E3 produziert werden.

1.3.2 Die Berechnung der Inversen hat genau dann einen Vorteil, wenn die Produktionsmengen nicht nur für einen Lagerbestand, sondern für unterschiedliche Lagerbestände bestimmt werden sollen. So reduziert sich der weitere Rechenaufwand lediglich auf eine einfache Multiplikation der Inversen von M_{ZE} mit den Vektoren der jeweiligen Lagerbestände. Das Lösen von Gleichungssystemen ist dann nur einmal notwendig.

Lösung Aufgabe 1 **Seite 2/2**

1.4.1 Die Preise müssen mit Rabattgewährung größer als Null sein:

$26{,}54 - 0{,}5r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 53{,}08$

$69{,}55 - 1{,}5r > 0 \quad \Leftrightarrow r < 46{,}37$

$49{,}61 - r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 49{,}61$

Die Rabattgewährung r soll nur ganzzahlig ($\in \mathbb{N}$) sein; es gilt somit $0 \leq r \leq 46$.

1.4.2 Sinnvoller Bereich für r:

Es gilt: $G \geq 0$ mit $G = E - K$

$$G = e_r^T \cdot \vec{x} - K = (26{,}54 - 0{,}5r \quad 69{,}55 - 1{,}5r \quad 49{,}61 - r)\begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix} - 85055 \geq 0$$

$$19905 - 375r + 62595 - 1350r + 24805 - 500r - 85055 \geq 0$$

$$22250 - 2225r \geq 0$$

$$r \leq 10$$

Für die Wahl der Rabattkategorie r gilt: $0 \leq r \leq 10$

Lösung Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 100**

3.1 $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix}$; $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix}$; $a, b, c \geq 0$; $C_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$

3.1.1 Es gilt: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

Daraus folgt: $(1 \quad a \quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 15 \qquad 1 + 2a + 6 = 15 \quad \Leftrightarrow a = 4$

$(4 \quad 1 \quad b)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \qquad 4 + 2 + 2b = 10 \quad \Leftrightarrow b = 2$

$(1 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ c \end{pmatrix} = 7 \qquad 1 + 6 + c = 7 \quad \Leftrightarrow c = 0$

3.1.2 Deutung im Sachzusammenhang:

a= 4: Für eine ME des Zwischenproduktes Z2 werden 4 ME des pflanzlichen Rohstoffs R2 benötigt.

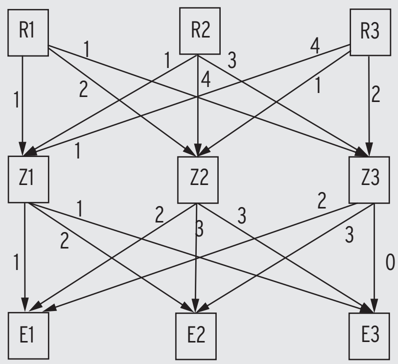
b = 2: Für eine ME des Zwischenproduktes Z3 werden 2 ME des pflanzlichen Rohstoffs R3 benötigt.

c = 0: Für eine ME des Endproduktes E3 werden keine ME des Zwischenproduktes Z3 verbraucht.

Lösung Aufgabe 2 **Seite 2/2**

3.1.3 Materialverflechtung

Gozintograph



3.2.1 **Variable Kosten je ME der Endprodukte E1, E2 und E3**

Materialkosten:

$$(4{,}5 \quad 2{,}8 \quad 3{,}2) \cdot C_{RE} = (4{,}5 \quad 2{,}8 \quad 3{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix} = (105{,}5 \quad 168{,}3 \quad 90{,}3)$$

Fertigungskosten Zwischenprodukte:

$$(8{,}5 \quad 5 \quad 6{,}5) \cdot B_{ZE} = (8{,}5 \quad 5 \quad 6{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (31{,}5 \quad 51{,}5 \quad 23{,}5)$$

Variable Kosten je ME der Endprodukte:

$(105{,}5 \quad 168{,}3 \quad 90{,}3) + (31{,}5 \quad 51{,}5 \quad 23{,}5) + (3 \quad 2{,}5 \quad 4)$

$= (140 \quad 222{,}3 \quad 117{,}8)$

Die variablen Kosten für eine ME von E1 betragen 140 GE, für eine ME E2 222,3 GE und 117,8 GE für eine ME E3.

3.2.2 **Produktionszahlen der Endprodukte**

Zu lösen ist: $(140 \quad 222{,}3 \quad 117{,}8) \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} + 5000 = 47232$

$140x + 444{,}6x + 471{,}2x + 5000 = 47232 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 40$

Vom Endprodukt E1 können 40 E, von E2 80 ME und von E3 160 ME hergestellt werden.

Lösung Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 101**

1.1 Das Element $a_{2;3}$ der Grundelement-Zwischenprodukt-Tabelle ist 100.

Ein Beutel B enthält 100 Stecker S1.

A: Grundelement-Zwischenprodukt-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 34 & 24 & 100 \\ 17 & 12 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

B: Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 16 & 34 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

C: Grundelement-Endprodukt-Matrix; $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 288 & 450 \\ 1092 & 1624 \\ 396 & 612 \\ 136 & 208 \end{pmatrix}$

1.2 Bedarf an Zwischenprodukten für den Auftrag $\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix}$

$B \cdot \vec{x} = \vec{z} = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 16 & 34 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15600 \\ 29800 \\ 4400 \end{pmatrix}$

Bedarf an Grundelementen (Rohstoffen) für den Auftrag, also für $\vec{z} = \begin{pmatrix} 15600 \\ 29800 \\ 4400 \end{pmatrix}$

$A \cdot \vec{z} = \vec{r} = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 34 & 24 & 100 \\ 17 & 12 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15600 \\ 29800 \\ 4400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 455400 \\ 1685600 \\ 622800 \\ 212800 \end{pmatrix}$

Alternative: Die Grundelemente lassen sich auch mit $C \cdot \vec{x} = \vec{r}$ berechnen.

Für den Auftrag braucht man 455400 V1, 1685600 S1, 622800 R1, 212800 P1 und muss 15600 W1, 29800 W2 und 4400 B herstellen.

1.3 Produktionskosten Grundelemente: $(0{,}04 \quad 0{,}01 \quad 0{,}03 \quad 0{,}02) \begin{pmatrix} 455400 \\ 1685600 \\ 622800 \\ 212800 \end{pmatrix} = 58012$

Produktionskosten Zwischenprodukte: $(0{,}30 \quad 0{,}20 \quad 0{,}05) \begin{pmatrix} 15600 \\ 29800 \\ 4400 \end{pmatrix} = 10860$

Verpackungskosten: $(0{,}50 \quad 0{,}60) \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix} = 700$

Mit Fixkosten von 1500 EUR erhält man die

Gesamtkosten: 58012 + 10860 + 700 + 1500 = 71072

Erlös: $(50 \quad 75) \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix} = 77500$

Gewinn = Erlös – Kosten = 77500 – 71072 = 6428

Der Gewinn für diesen Auftrag beträgt 6428 EUR.

Lösung Aufgabe 3 **Seite 2/2**

2.1 Ein inhomogenes LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn $Rg(A) = Rg(A \mid \vec{b})$ gilt.
Für den Fall, dass $Rg(A) = Rg(A; \vec{b}) = n$ ist (n ist die Anzahl der Unbekannten), existiert genau eine Lösung.
Für den Fall, dass $Rg(A) = Rg(A; \vec{b}) < n$ ist (n ist die Anzahl der Unbekannten), gibt es unendlich viele Lösungen.

2.2 Bedingung für die Produktionsmengen der Endprodukte: $B \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 600 \\ 1340 \\ 180 \end{pmatrix}$

Einsetzen ergibt das LGS für p_1 und p_2: $\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 12 & 600 \\ 16 & 34 & 1340 \\ 3 & 4 & 180 \end{array}\right)$

Umformung mit dem Gaußverfahren : $\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 12 & 600 \\ 0 & 18 & 540 \\ 0 & 1 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 12 & 12 & 600 \\ 0 & 18 & 540 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$Rg(A) = Rg(A; \vec{b}) = 2$ (Anzahl der Unbekannten = 2), es existiert genau eine Lösung.
$p_1 = 20$; $p_2 = 30$
Der Lagerbestand kann durch die Produktion von 20 Modellen Haus und 30 Modellen Turm vollständig aufgebraucht werden.

3 Bestellvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \end{pmatrix}$
Für diese Bestellung nötige Grundelemente R1:
Multiplikation der 3. Zeile der Grundelemente-Endprodukt-Matrix mit $\vec{b}$:
$(396 \quad 612)\begin{pmatrix} z \\ 2z \end{pmatrix} = 1620z$
Bedingung für z: $1620z \leq 40500$ $\Leftrightarrow z \leq 25$
Es können daher höchstens 25 Modelle Haus und 50 Modelle Turm verkauft werden.
Maximaler Erlös: $(50 \quad 75)\begin{pmatrix} 25 \\ 50 \end{pmatrix} = 5000$
Unter diesen Bedingungen kann ein maximaler Erlös von 5000 EUR erzielt werden.

Lösung Aufgabe 4 Seite 1/2 Aufgabe Seite 103

1 Verflechtungsmatrizen

$$A_{RG} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 1 & 2 & 0{,}5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ B_{GM} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};\ C_{RM} = A_{RG} \cdot B_{GM} = \begin{pmatrix} 115 & 110 \\ 12 & 5{,}5 \\ 7 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Mit dem Auftragsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$ berechnet man den

Rohstoffbedarf für diesen Auftrag: $C_{RM} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 115 & 110 \\ 12 & 5{,}5 \\ 7 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28000 \\ 2025 \\ 3550 \\ 2400 \end{pmatrix}$

Der Lagerbestand reicht nicht aus.

Es ergeben sich folgende Nachbestellungen: $\begin{pmatrix} 30000 \\ 2000 \\ 3000 \\ 4000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28000 \\ 2025 \\ 3550 \\ 2400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ -25 \\ -550 \\ 1600 \end{pmatrix}$

Vom Lanolin müssen 25 ME und vom Rosenöl 550 ME nachbestellt werden.

2 Rohstoffkosten je ME der Endprodukte H und F:

$$K_R = \vec{k}_R \cdot C_{RM} = (0{,}2 \quad 1 \quad 15 \quad 8) \cdot \begin{pmatrix} 115 & 110 \\ 12 & 5{,}5 \\ 7 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = (212 \quad 392{,}5)$$

Fertigungskosten der Grundkomponenten je ME der Endprodukte H und F:

$$K_G = \vec{k}_G \cdot B_{GM} = (0{,}5 \quad 1 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (11{,}5 \quad 16{,}5)$$

Variable Herstellkosten je ME der Endprodukte H und F:

$$\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C_{RM} + \vec{k}_Z \cdot B_{GM} + \vec{k}_E = (212 \quad 392{,}5) + (11{,}5 \quad 16{,}5) + (2{,}5 \quad 2) = (226 \quad 411)$$

Variable Herstellkosten für den gesamten Auftrag:

$$K_v = \vec{k}_v \cdot \vec{x} = (226 \quad 411) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = 84250$$

Erlöse für den gesamten Auftrag: $(300 \quad 500) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = 105000$

Gewinne = Erlöse – (variable Kosten + Fixkosten)

$= 105000 - (84250 + 15750) = 5000$

Es wird ein Gewinn in Höhe von 5000 GE erzielt.

3.1 Es gilt: $A_{RG} \cdot B_{GM} = C_{RM}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 0{,}5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 110 \\ 12 & 5{,}5 \\ 7 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

Ausmultiplizieren (1. Zeile von A_{RG} · 1. + 2. Spalte von B_{GM}) ergibt das mehrdeutig lösbare Gleichungssystem: $a + 5b + 2c = 115 \wedge 3a + 5c = 110$

(2 Gleichungen für 3 Unbekannte)

Lösung Aufgabe 3 **Seite 2/2**

4.3.1 Entscheidungsregel

H_0: $p \geq 0{,}1$ H_1: $p < 0{,}1$

X gebe die Anzahl der defekten Scheinwerfer an.

Aus der Tabelle (GTR/CAS) mit n = 100 und p = 0,1 oder mit GTR/CAS entnimmt man:

$P(X \leq 4) = 0{,}0237$ und $P(X \leq 5) = 0{,}0576$

Damit ist der Ablehnungsbereich gegeben mit $\overline{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Das heiβt, die Nullhypothese darf verworfen werden, wenn höchstens vier defekte Scheinwerfereinheiten gefunden werden. Der Briedenband KG ist es mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% gelungen, eine bessere Qualität zu erreichen, wenn höchstens vier defekte Scheinwerfereinheiten gefunden werden.

4.3.2 Beurteilung der Aussage des Qualitätsprüfers

Das Stichprobenergebnis liegt mit 6 defekten Scheinwerfereinheiten nicht im Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; die Nullhypothese kann also nicht verworfen werden. Dies beweist jedoch nicht, dass keine Qualitätsverbesserung stattgefunden hat.

4.3.3 Wahrscheinlichkeit, dass fünf und mehr defekte Scheinwerfer trotz Senkung der Ausschussquote auf 5 % gefunden werden.

X gebe die Anzahl der defekten Scheinwerfer an.

Gesucht ist $P(X \geq 5)$ unter der Voraussetzung p = 0,05

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0{,}4360 = 0{,}5640$

Die Wahrscheinlichkeit fünf oder mehr defekte Scheinwerfer in einer Stichprobe von 100 Scheinwerfereinheiten zu finden beträgt rund 56,40 %.

4.3.4 Interpretation aus Sicht der Briedenband KG.

Obwohl eine deutliche Verbesserung stattgefunden hat, kommt man mit einer Wahrscheinlichkeit von 56,4 % zu dem Ergebnis, die Umstellung habe nicht zum gewünschten Erfolg geführt.

Lösung Aufgabe 4 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 138**

2.1.1 Passendes Urnenmodell: Eine Urne ist mit acht weißen und zwei roten Kugeln zu füllen.

Es wird ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen.

2.1.2 P(3 Flakons einwandfrei) = $\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{15} = 0{,}4667$

2.1.3 Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Flakons mangelhaft sind.

P(2 Flakons mangelhaft) = $3 \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{15} = 0{,}0667$

2.2.1 Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt.

Die Ereignisse beschränken sich auf die Fälle „Ausschuss" bzw. „Nicht-Ausschuss".

Da der laufenden Produktion entnommen wird, ist bei jedem

Prüfstück die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss identisch p = 0,05. Folglich

handelt es sich um eine Bernoullikette der Länge n = 50 und X ist binomialverteilt.

2.2.2 Erwartungswert der Zufallsgröße X mit n = 50 , p = 0,05: $\mu = n \cdot p = 2{,}5$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{50 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} = 1{,}54$

2.2.3 $P(A) = 0{,}05$ $P(B) = 0{,}95^{11} \cdot 0{,}05 \approx 0{,}0284$

$P(C) = \binom{50}{3} \cdot 0{,}95^{47} \cdot 0{,}05^{3} \approx 0{,}2199$ $P(D) = P(X \leq 3) \approx 0{,}7604$

$P(E) = P(2{,}5 - 1{,}54 \leq X \leq 2{,}5 + 1{,}54) = P(1 \leq X \leq 4) = 0{,}8194$

2.2.4 Kleinster Stichprobenumfang

Y gibt die Anzahl der fehlerhaften Prüfstücke an.

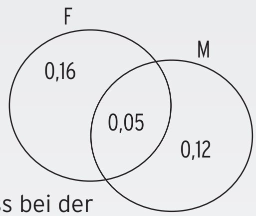
Y ist binomialverteilt mit den Parametern n und p = 0,05.

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}95^{n} \cdot 0{,}05^{0}$

Also gilt: $P(Y \geq 1) > 0{,}90$

$1 - 0{,}95^{n} > 0{,}90 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}95^{n} < 0{,}10 \quad \Leftrightarrow n > \frac{\lg(0{,}10)}{\lg(0{,}95)} = 44{,}890...$

Es müssen mindestens 45 Prüfstücke entnommen werden.



2.3 F: Creme ist zu fest, M: Füllmenge stimmt nicht

2.3.1 $P(\overline{F} \cap M) = P(M) - P(F \cap M)$

$= 0{,}12 - 0{,}05 = 0{,}07$

2.3.2 Der Praktikant hat nicht recht. Er hat nicht berücksichtigt, dass bei der Vereinigungsmenge die Schnittmenge nicht doppelt gezählt wird.

2.3.3 Die Wahrscheinlichkeit einer einwandfreien Creme entspricht:

$P(\overline{F} \cap \overline{M}) = 1 - P(F \cup M) = 1 - (P(F) + P(M) - P(F \cap M))$ Additionssatz

$= 1 - (0{,}16 + 0{,}12 - 0{,}05) = 0{,}77$

2.3.4 Die Wahrscheinlichkeit, den einen oder den anderen Fehler anzutreffen, ist:

$P(\overline{F} \cap M) + P(F \cap \overline{M}) = 0{,}11 + 0{,}07 = 0{,}18$

Lösung Aufgabe 4 **Seite 2/2**

2.4 Die Zufallsgröße Z beschreibt die Kosten der Reklamationen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung wird in folgender Tabelle dargestellt:

z_i	0	4	7	11
$P(Z = z_i)$	0,9215	$0{,}05 \cdot 0{,}97 = 0{,}0485$	$0{,}03 \cdot 0{,}95 = 0{,}0285$	0,0015

Die durchschnittlich zu erwartenden Kosten pro Parfum setzen sich aus den Produktionskosten und den durchschnittlichen Reklamationskosten zusammen: Die durchschnittlichen Reklamationskosten werden durch den Erwartungswert wiedergegeben: $E(Z) = 0 \cdot 0{,}9212 + 4 \cdot 0{,}0485 + 7 \cdot 0{,}0285 + 11 \cdot 0{,}0015 = 0{,}41$

Der durchschnittlich zu erwartende Gewinn ergibt sich aus den Erlösen abzüglich der Kosten: $g = 25 - 15 - 0{,}41 = 9{,}59$

Es ist mit einem durchschnittlichen Gewinn (Deckungsbeitrag) von 9,59 EUR pro Flakon zu rechnen.

Hinweis: Deckungsbeitrag = Erlös – variable Kosten

Lösung Aufgabe 5 **Aufgabe Seite 140**

2.1 $P(\text{Handcreme}) = \left(\frac{60}{360}\right)^2 + \frac{60}{360} \cdot \frac{90}{360} \cdot \frac{60}{360} \cdot 2 + \frac{60}{360} \cdot \frac{210}{360} \cdot \frac{60}{360} \cdot 2 = \frac{2}{27}$

$P(\text{Faltencreme}) = \left(\frac{90}{360}\right)^2 + \frac{60}{360} \cdot \frac{90}{360} \cdot \frac{90}{360} \cdot 2 + \frac{90}{360} \cdot \frac{210}{360} \cdot \frac{90}{360} \cdot 2 = \frac{5}{32}$

Die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn der Handcreme beträgt 7,4 % und für den Gewinn der Faltencreme 15,6 %.

2.2 Das zu Grunde liegende Urnenmodell ist Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge. Man benötigt 12 Kugeln: für Niete z. B. 7 rote Kugeln, für Faltencreme z. B. 3 blaue Kugeln und z. B. 2 weiße Kugeln für die Handcreme.

Dann wird bis zu drei Mal mit Zurücklegen gezogen. Man hat das Produkt gewonnen, das der entsprechenden Farbe zugeordnet ist, wenn mindestens zwei Mal die gleiche Kugelfarbe gezogen wird.

2.3.1 Zu erwartender Gewinn für eine Produktion von 1000 Tuben

$(0{,}04 \cdot 10{,}50 + 0{,}05 \cdot (-1) + 0{,}91 \cdot 15) \cdot 1000 - 850 - 8000 = 5170$

Der Gewinn beträgt 5 170 Euro.

2.3.2 $(0{,}04 \cdot 10{,}50 + 0{,}05 \cdot (-25) + 0{,}96 \cdot 15) \cdot 1000 - 250 - 8000 = 5\,320$

Das Weglassen der Qualitätskontrolle würde zu einem geringfügig höheren Gewinn führen. Die Reklamationen könnten Kunden verärgern, die dann das Produkt wechseln würden, so dass sich auf Dauer der geringfügige Kostenvorteil nicht lohnen würde.

Lösung Aufgabe 6 **Aufgabe Seite 141**

1 X sei die Anzahl der Handyschalen mit fehlerhafter Farbpigmentierung.

X ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,1

$P(A) = P(X = 5) = \binom{100}{5} \cdot 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^{95} = 0{,}0339$

$P(B) = P(X < 3) = F(100; 0{,}1; 2) = 0{,}0019$

$P(C) = P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - F(100; 0{,}1; 7) = 1 - 0{,}2061 = 0{,}7939$

$P(D) = P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - 0{,}5832 = 0{,}4168$

2 X sei die Anzahl fehlerhafter Handyschalen bei n Kontrollen.

X ist binomialverteilt mit p = 0,1: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$1 - 0{,}9^n \geq 0{,}9 \quad \Leftrightarrow 0{,}9^n \leq 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \; n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9} = 21{,}85$

Es müssen mindestens 22 Schalen überprüft werden.

3 X ist binomialverteilt mit n =100 und p = 0,1

Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$

$P(7 \leq X \leq 13) = F(100; 0{,}1; 13) - F(100; 0{,}1; 6) = 0{,}8761 - 0{,}1172 = 0{,}7590$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 kontrollierten Handyschalen die Anzahl der fehlerhaften Handyschalen um höchstens die Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht beträgt 0,7590.

4.1 Entscheidungsregel:

H_0: $p \leq 0{,}02$ und H_1: $p > 0{,}02$ und n = 100 und $\alpha = 0{,}05$

X sei die Anzahl fehlerhafter Handyschalen. X ist bei wahrer Nullhypothese im Extremfall binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,02 .

Rechtsseitiger Test, Ablehnungsbereich von H_0: A = {k; ... ;100}

$P(X \geq k) \leq 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \; 1 - P(X \leq k - 1) \leq 0{,}05 \Leftrightarrow \; P(X \leq k - 1) \geq 0{,}95$

Mithilfe der Tabelle: $k - 1 = 5 \Rightarrow k = 6$

Mit GTR/CAS: $P(X \leq 4) \approx 0{,}949 < 0{,}95$; $P(X \leq 5) \approx 0{,}985 > 0{,}95$

Wenn sechs oder mehr fehlerhafte Handyschalen in der Stichprobe gefunden werden, kann der Vertriebsleiter H_0 verwerfen und somit mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% die Aussage des Technikers widerlegen.

4.2 Wenn nur 4 fehlerhafte Handyschalen gefunden werden, kann der Vertriebsleiter die Nullhypothese nicht verwerfen und somit die Aussage des Technikers nicht widerlegen.

Lösung Aufgabe 7 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 142**

3.1 X: Anzahl der Ananaskonserven; X ist $B_{50;\frac{1}{3}}$-verteilt.

$P(E_1) = P(X = 16) = \binom{50}{16} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{16} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{34} = 0{,}1178 = 11{,}78\ \%$

$P(E_2) = P(X \leq 20) = 0{,}8741 = 87{,}41\%$

$P(E_3) = P(X > 22) = 1 - P(X \leq 22) = 1 - 0{,}9576 = 0{,}0424 = 4{,}24\ \%$

$P(E_4) = P(13 < X < 19) = P(X \leq 18) - P(X \leq 13) =$

$= 0{,}7126 - 0{,}1715 = 0{,}5411 = 54{,}11\%$

E_5: Es werden mindestens 12 Ananas-Konserven gefunden

$P(E_5) = P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - 0{,}0570 = 0{,}9430 = 94{,}30\ \%$

3.2.1 p steht für die Wahrscheinlichkeit, dass der Mitarbeiter eine beliebige Probe falsch erkennt. Der Mitarbeiter möchte die Gegenhypothese $H_1: p < 0{,}3$ belegen. Da er dies nicht direkt kann, will er mit dem Hypothesentest die Nullhypothese als „unwahrscheinlich" erscheinen lassen und verwerfen. Es wird linksseitig getestet: Eine kleine Anzahl falsch benannter Proben spricht gegen die Nullhypothese und untermauert die Aussage des Mitarbeiters.

3.2.2 Es ist $H_0: p \geq 0{,}3$ und $H_1: p < 0{,}3$.
Gibt X die Anzahl der von den 50 Proben nicht richtig erkannten Proben an, ist X im Extremfall der Nullhypothese B(50; 0,3)-verteilt. H_0 wird für kleine Werte von X abgelehnt, es wird linksseitig getestet.
Daher ist das größte $k \in \mathbb{N}$ mit $P(X \leq k) \leq 0{,}05$ gesucht.
Tabelle/GTR/CAS: $P(X \leq 9) = 0{,}0402$
$P(X \leq 10) = 0{,}0789 \Rightarrow k = 9$ und $\overline{A} = \{0, 1, \ldots, 9\}$
Wenn der Mitarbeiter höchstens neun Proben falsch, d. h. mindestens 41 Proben richtig erkennt, darf die Nullhypothese verworfen und davon ausgegangen werden, dass seine Behauptung „In weniger als 30 Prozent aller Fälle erkenne ich nicht, welches Süßungsmittel verwendet wurde." richtig ist (mit einer Unsicherheit von 5 %).

3.2.3 Wenn er 42 Proben richtig erkennt, hat er acht Proben nicht richtig erkannt. Da acht im Ablehnungsbereich liegt, wird die Nullhypothese verworfen und angenommen, dass der Mitarbeiter tatsächlich in weniger als 30 Prozent aller Fälle nicht richtig erkennt, welches Süßungsmittel verwendet wurde. Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass er so viele oder mehr Proben richtig erkennt, wäre nämlich kleiner als $\alpha = 0{,}05$, wenn er eigentlich in mindestens 30 Prozent aller Fälle nicht richtig liegt.
Tatsächlich ist $P_{p = 0{,}3}(X \leq 8) = 0{,}0183 = 1{,}83\%$, d. h. das tatsächlich erreichte Signifikanzniveau beträgt sogar 1,83 %.

Lösung Aufgabe 7 **Seite 2/2**

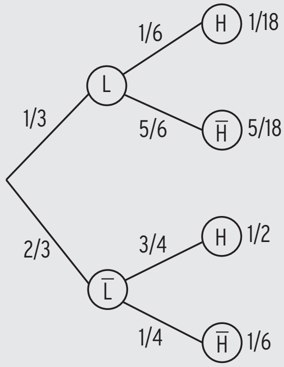
3.3.1 L : Papaya light

$\overline{L}$: normale Papaya

H : Mitarbeiter gibt „herkömmlich gesüßt" an

$\overline{H}$: Mitarbeiter gibt „nicht herkömmlich gesüßt" an

Baumdiagramm:



Vierfeldertafel:

	H	$\overline{H}$	Summe
L	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$
$\overline{L}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
Summe	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

4.2.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_H(\overline{L}) = \frac{P(\overline{L}) \cdot P_{\overline{L}}(H)}{P(H)} = \frac{P(\overline{L}) \cdot P_{\overline{L}}(H)}{P(\overline{L}) \cdot P_{\overline{L}}(H) + P(L) \cdot P_L(H)}$

$$P_H(\overline{L}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{18}} = \frac{9}{10} = 90\%$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass er mit seiner Aussage richtig liegt, beträgt 90 %.

Lösung Aufgabe 8 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 143**

3.1 X: Anzahl der E-Bikes unter den n verkauften E-Bikes; X ist binomialverteilt mit p = 0,3 (Wk, dass das verkaufte Rad ein E-Bike ist) und dem zu bestimmenden n

Bedingung: $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$ $\quad P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}7^n \geq 0{,}99$

Hinweis: $P(X = 0) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot \ldots \cdot 0{,}7 = 0{,}7^n$ (n Faktoren)

Umformung $1 - 0{,}7^n \geq 0{,}99$ ergibt: $\quad 0{,}7^n \leq 0{,}01$

Lösung durch Logarithmieren: $\quad n \lg 0{,}7 \leq \lg 0{,}01 \quad |: \lg 0{,}7$

wegen $\lg 0{,}7 < 0$ $\quad n \geq \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}7} \approx 12{,}91$

Es müssen also mindestens 13 Fahrräder verkauft werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein E-Bike zu verkaufen.

Lösung durch Probieren mit GTR/CAS:

n = 11: $P(X = 0) = 0{,}7^{11} \approx 0{,}1977$; n = 12: $P(X = 0) = 0{,}7^{12} \approx 0{,}0138 > 0{,}01$

n = 13: $P(X = 0) = 0{,}7^{13} \approx 0{,}0097 < 0{,}01$

3.2.1 Da Herr Weber davon ausgeht, dass sich der Anteil p der verkauften E-Bikes erhöhen wird, möchte er die Annahme $p > 0{,}3$ durch eine Test bestätigen und die Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}3$ verwerfen.

Lösung Aufgabe 8 **Seite 2/2**

3.2.2 Rechtsseitiger Hypothesentest, nur bei signifikanter Abweichung nach oben wird die Nullhypothese verworfen. X ist die Anzahl der E-Bikes unter den nächsten 100 verkauften E-Bikes; X ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,3

Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}3$ (höchstens 30 % sind E-Bikes)
Gegenhypothese H_1: $p > 0{,}3$ (mehr als 30 % sind E-Bikes)
Gesucht: Kleinstes k, sodass $P(X \geq k + 1) \leq 0{,}05$ ($P(\text{Ablehnungsbereich}) \leq 0{,}05$)
entsprechend $P(X \leq k) \geq 0{,}95$
Bestimmung von k:
Hinweis: Die Sigma-Regel $P(X \leq \mu + 1{,}64 \cdot \sigma) \approx 0{,}95$ liefert mit $\mu = 100 \cdot 0{,}3 = 30$
und $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} \approx 4{,}58$.
Mit $\mu + 1{,}64 \cdot \sigma = 30 + 1{,}64 \cdot 4{,}58 = 37{,}5$ ergibt sich k in der Nähe von 38.
$P(X \leq 37) \approx 0{,}9470 < 0{,}95$ (mit Tabelle oder GTR/CAS)
$P(X \leq 38) \approx 0{,}9660 > 0{,}95$
also $P(X \geq 39) = 1 - P(X \leq 38) \approx 1 - 0{,}9660 = 0{,}034 < 0{,}05$
Damit ist k = 39, k+ 1 = 39 und der Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{39; 40; \dots ; 100\}$
Entscheidungsregel: Bei mindestens 39 verkauften E-Bikes unter den nächsten 100 verkauften Fahrrädern kann H. Weber (auf dem 5 %-Signifikanzniveau) davon ausgehen, dass die Nullhypothese falsch ist und der Verkaufsanteil der E-Bikes auf mehr als 30 % ansteigt.

Lösung Aufgabe 9 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 144**

3.1 X gebe die Anzahl defekter Nabendynamos an.

$P(X = 2) = \binom{12}{2} 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^{10} = 0{,}04380\ldots \approx 4{,}38\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwölf Nabendynamos genau zwei defekt sind, beträgt etwa 4,38 %.

3.2 X gebe die Anzahl defekter Nabendynamos an. Dann ist X binomialverteilt mit den Parametern n = 50 und p = 0,03 und es gilt:

$P(E1) = P(X \leq 12) = F(50; 0{,}03; 12) = 100\%$

$P(E2) = P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0{,}9963 = 0{,}0037 = 0{,}37\%$

$P(E3) = P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2) = 0{,}9993 - 0{,}8108 = 0{,}1885 = 18{,}85\%$

3.3 X gebe die Anzahl defekter Nabendynamos (unter n Nabendynamos) an.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) > 0{,}99$ $\quad 0{,}97^n < 0{,}01$

Logarithmieren ergibt $\quad n > 151{,}19$

Es müssen mindestens 152 Nabendynamos überprüft werden.

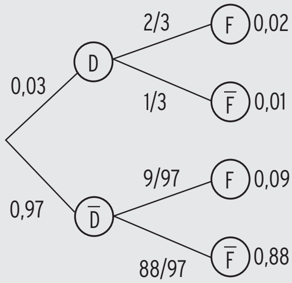
Lösung Aufgabe 9 **Seite 2/2**

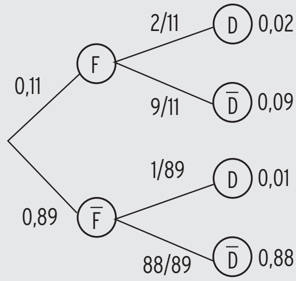
3.4.1 Baumdiagramm oder eine Vierfeldertafel.

D: = Nabendynamo defekt

F: = Automat meldet „fehlerhafter Dynamo" und sortiert diesen aus

	F	$\overline{F}$	Σ
D	0,02	0,01	0,03
$\overline{D}$	0,09	0,88	0,97
Σ	0,11	0,89	1,0





3.4.2 Wahrscheinlichkeiten.

$P(E4) = P(D \cap \overline{F}) = P(D) \cdot P_D(\overline{F}) = 0{,}03 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}00\%$

$P(E5) = P_D(\overline{F}) = \frac{1}{3} = 33{,}33\%$

$P(E6) = P_F(\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D}) \cdot P_{\overline{D}}(F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}97 \cdot \frac{9}{97}}{0{,}11} = 81{,}82\%$

$P(E7) = P_{\overline{D}}(F) = \frac{9}{97} = 9{,}28\%$

3.4.3 Beurteilung der Qualität des Automaten

Die zunächst augenscheinlich gute Quote von 2 %, dass ein Nabendynamo defekt ist und der Automat diesen aussortiert, lässt bei näherer Untersuchung keine gute Qualität des Automaten zu, da in 81,82 % der Fälle ein aussortierter Nabendynamo tatsächlich nicht defekt ist (siehe E6). Somit sind die eventuellen Kosten des Ausschusses sehr hoch. Außerdem wird in einem Drittel der Fälle ein defekter Nabendynamo nicht aussortiert, was zu hohen Service- und Schadenersatzkosten führen kann.

Zusammenfassend ist die Qualität des Automaten als unzureichend beschreibbar.

Lösung Aufgabe 10 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 145**

3.1 X:Anzahl der defekten Beleuchtungsanlagen; X ist $B_{100;\,0{,}04}$-verteilt

3.1.1 Genau 6 Beleuchtungsanlagen sind Ausschussware: $P(X = 6) = 0{,}1052 = 10{,}52\ \%$

3.1.2 Höchstens 2 Beleuchtungsanlagen sind Ausschussware: $P(X \leq 2) = 0{,}2321 = 23{,}21\ \%$

3.1.3 Mehr als eine Beleuchtungsanlage ist Ausschussware:

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}0872 = 0{,}9128 = 91{,}28\ \%$

3.1.4 Mehr als 3, aber weniger als 7 Beleuchtungsanlagen sind Ausschussware:

$P(3 < X < 7) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = 0{,}8936 - 0{,}4295 = 0{,}4641 = 46{,}41\ \%$

Lösung Aufgabe 10 **Seite 2/2**

3.2.1 Es ist: H_1: $p > 0{,}04$ (Mehr als 4 % der Teile sind Ausschussware.)
H_0: $p \leq 0{,}04$ (4 % und weniger Teile sind Ausschussware.)

Die Nullhypothese würde nur verworfen werden, wenn bei einer Überprüfung die Anzahl an Ausschussteilen signifikant nach oben abweicht. Daher handelt es sich um einen rechtsseitigen Test.

Mit $p = 0{,}04$, $n = 100$ und $\alpha = 0{,}1$ ergibt sich: $P(X \geq k) < 0{,}1 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq k - 1) < 0{,}1$

$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) \approx 1 - 0{,}8936 = 0{,}1064 > 0{,}1$

$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475 < 0{,}1$

Für den Ablehnungsbereich der Nullhypothese gilt somit: $\overline{A} = \{8;9;...;100\}$.

Befinden sich mindestens 8 defekte Beleuchtungsanlagen unter den getesteten 100, so darf der Mitarbeiter die Nullhypothese verwerfen und seine Vermutung, dass der Ausschussanteil über 4 % liegt, als bestätigt ansehen

3.2.2 Da die Anzahl der beschädigten Beleuchtungsanlagen nicht im Ablehnungsbereich der Nullhypothese liegt, kann der Mitarbeiter seine Hypothese, dass mehr als 4 % der Beleuchtungseinheiten defekt sind, nicht mit ausreichender Signifikanz belegen. Gleichzeitig ist jedoch damit die Nullhypothese nicht bewiesen

3.3.1 Durchschnittliche zu erwartende Kosten pro Reparatur

$\mu = 0{,}172 \cdot 85 + 0{,}087 \cdot 38 + 0{,}154 \cdot 28 + 0{,}069 \cdot 47 + 0{,}048 \cdot 18 + 0{,}124 \cdot 23 + 0{,}346 \cdot 5{,}20 = 31{,}0$

Die durchschnittlichen zu erwartenden Kosten pro Reparatur betragen 31,00 €.

3.3.2 Bei 10 % der Fahrräder wird eine Reparatur im dritten Jahr notwendig.

Durchschnittliche zu erwartende Kosten pro Fahrrad: 0,10 · 31,00 € = 3,10 €.

Durchschnittlicher Erlös pro Fahrrad: 3,50 €.

Die Marketingabteilung kann langfristig mit einem Gewinn von 0,40 € pro Fahrrad rechnen.

3.4 p(Ausschuss) = 5 %; Stichprobe von 10 Fahrrädern:

X sei die Anzahl defekter Fahrräder in der Stichprobe; X ist $B_{10;\,0{,}05}$-verteilt.

Annahme einer Sendung: $P(X \leq 1) = 0{,}9139$

Ablehnung einer Sendung: $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 0{,}0115$

Weitere Stichprobe von 18 Fahrrädern für $P(X = 2) = 0{,}0746$

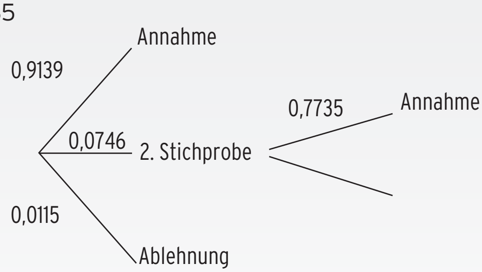
Y sei die Anzahl defekter Fahrräder in der Stichprobe; Dann ist Y $B_{18;\,0{,}05}$-verteilt:

Annahme einer Sendung: $P(Y \leq 1) = 0{,}7735$

$P(\text{Annahme}) = 0{,}9139 + 0{,}0746 \cdot 0{,}7735$

$P(\text{Annahme}) = 0{,}9716$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Discounter eine Sendung annimmt, liegt bei 97,2 %.



Lösung Aufgabe 11 **Aufgabe Seite 146**

1 Berechnung über das Gegenereignis $\overline{A}$: In keiner Produktionsstufe treten Fehler auf.

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}88 \cdot 0{,}905 = 0{,}2036 \approx 0{,}20$

Alternativ: Summe der drei Pfade, bei denen ein Fehler auftritt

2 Modell: Ziehen mit Zurücklegen

2.1 Die Ereignisse treten unabhängig voneinander auf, also $P(E_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$

2.2 E_2: Genau die ersten 8 Regalbausätze sind in Ordnung.

Bei E_2 müssen die Gegenereignisse berücksichtigt werden: $P(E_2) = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^8 = 0{,}0067$

2.3 Bei E_3 ist es unerheblich, an welcher Stelle die fehlerhaften Regalbausätze entnommen werden. X: Anzahl der fehlerhaften Regalbausätze; $X \sim B_{10;0,2}$

$P(E_3) = P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^8 = 0{,}3020$

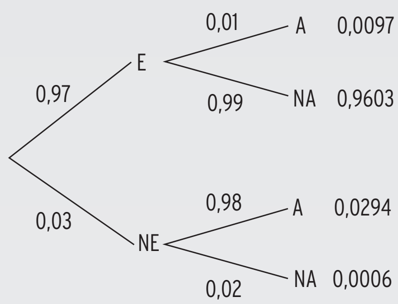
3.1 E: Der Regalbausatz ist einwandfrei

NE: Der Regalbausatz ist fehlerhaft (nicht einwandfrei).

A: Der Regalbausatz wird aussortiert.

NA: Der Regalbausatz wird als einwandfrei ausgeliefert (nicht aussortiert).

Baumdiagramm:



Dann gilt:

$P(NA) = P(E) \cdot P_E(NA) + P(NE) \cdot P_{NE}(NA)$

$= 0{,}97 \cdot 0{,}99 + 0{,}03 \cdot 0{,}02 \approx 0{,}9609$

96,09 % aller hergestellten Regalbausätze werden als einwandfrei ausgeliefert.

Lösung Aufgabe 12 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 146**

2.1.1 A: Die drei gezogenen Platten besitzen alle dieselbe Farbe.

$P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{30 \cdot 29 \cdot 28} + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{30 \cdot 29 \cdot 28} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{117}{812} = 0{,}1441$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei gezogenen Platten dieselbe Farbe besitzen beträgt ca. 14,41 %.

2.1.2 B: Die erste gezogene Platte ist blau; $P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

C: Die zweite gezogene Platte ist blau. Das Ereignis C kann auf zwei Arten eintreffen:

1. Die ersten beiden Platten sind blau oder

2. Die erste Platte ist nicht blau und die zweite ist blau.

$P(C) = \frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29} + \frac{5}{30} \cdot \frac{4}{29} = \frac{1}{6}$

Beide Ereignisse sind also gleich wahrscheinlich.

Lösung Aufgabe 12 **Seite 2/2**

2.2.1 Wahrscheinlichkeit für einen Stecker mit Riss beträgt ungefähr 5%

F: Formfehler R: Riss

$P(F) = 0{,}02;\ P(F \cup R) = \frac{800}{13300} = \frac{8}{133}\ ;\ P_F(R) = 0{,}5$

$P(F \cup R) = P(F) + P(R) - P(F \cap R)$

$P(R) = P(F \cup R) - P(F) + P(F \cap R) = P(F \cup R) - P(F) + P(F) \cdot P_F(R)$

$P(R) = \frac{8}{133} - 0{,}02 + 0{,}02 \cdot 0{,}05 \approx 0{,}0502$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass ein Stecker einen Riss hat, beträgt also ungefähr 5%.

2.2.2 Wahrscheinlichkeit, dass dieser Stecker (mit Riss) auch einen Formfehler hat.

$P_R(F) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}01}{0{,}0502} = 0{,}1992 \approx 20\%$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ungefähr 20 %.

2.3.1 Durchschnittlich zu erwartender Erlös je produziertem Modell Haus.

$E = 0{,}005 \cdot 0 + (0{,}01 \cdot 0{,}70 + 0{,}02 \cdot 0{,}75 + 0{,}08 \cdot 0{,}80 + 0{,}885) \cdot 50 = 48{,}55$

Der zu erwartende durchschnittlich Erlös beträgt 48,55 EUR.

2.3.2 Verkaufspreis p des Modells bei 50 EUR durchschnittlichem Erlös je produziertem Modell. Es muss gelten:

$0{,}005 \cdot 0 + (0{,}01 \cdot 0{,}70 + 0{,}02 \cdot 0{,}75 + 0{,}08 \cdot 0{,}80 + 0{,}885) \cdot p = 50{,}00$

$0{,}971 \cdot p = 50{,}00 \quad \Leftrightarrow \quad p = 51{,}49$

Der Verkaufspreis muss 51,49 EUR betragen.

Aufgabe 13 **Aufgabe Seite 148**

4.1.1 **Berechnung der Wahrscheinlichkeiten von E_1 und E_2**

X: Anzahl der defekten Platinen, X ist binomialverteilt mit n = 200 und p = 0,025

$P(E_1) = P(X = 6) \approx 0{,}1481$

$P(E_2) = P(X \le 6) \approx 0{,}7641$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit von E_3

$P(E_3) = 0{,}975^5 \cdot 0{,}025 \approx 0{,}0220$

4.1.2 **Erwartungswert und Standardabweichung**

$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}025 = 5$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{5 \cdot 0{,}975} \approx 2{,}21$

Vergleich der Wahrscheinlichkeiten

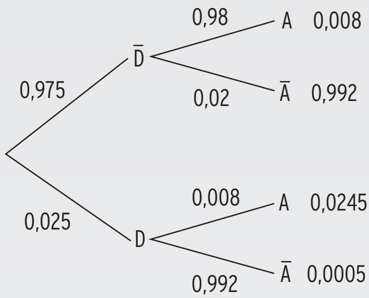
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = P(1 \le X \le 9) \approx 0{,}9637$

$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P(3 \le X \le 7) \approx 0{,}7478$

Die Aussage ist somit falsch.

4.2.1 Baumdiagramm/Vierfeldertafel

D: Defekt
A: Aussortiert



Vierfeldertafel:

	A	$\overline{A}$	gesamt
D	0,0245	0,0005	0,025
$\overline{D}$	0,0078	0,9672	0,975
gesamt	0,0323	0,9677	1

4.2.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P_A(\overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(A)} = \frac{0{,}0078}{0{,}323} \approx 0{,}2415$

4.2.3 Anzahl aussortierter Platinen

X_n beschreibt die Anzahl der funktionstüchtigen Platinen unter n aussortierten, die Zufallsvariable X_n ist binomialverteilt mit p = 0,2415

Sukzessives Ausprobieren liefert:

$n = 149$: $P(X_n \ge 30) = 1 - P(X_n \le 29) \approx 0{,}8946$

$n = 150$: $P(X_n \ge 30) = 1 - P(X_n \le 29) \approx 0{,}9024$

Somit müssen 150 Platinen abgenommen werden.

III Musteraufgabensätze zum Aufgabenteil A ab 2024

Aufgabensatz 1 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Lösungen Seite 174

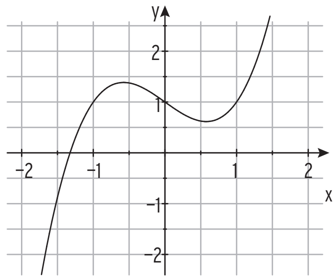
Pflichtaufgabe Analysis **Punkte**

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h durch

$f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

a) Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. 3

Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.



b) Die erste Ableitungsfunktion von h ist h′.

Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)\,dx$. 2

2

Pflichtaufgabe Stochastik

Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Treffer.

a) Nennen Sie in diesem Sachzusammenhang das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit $P(X < 3)$ bestimmt werden kann. 1

b) Entscheiden Sie, welcher der beiden Terme die Wahrscheinlichkeit für genau vier Treffer beschreibt: (i) $\binom{5}{4} \cdot p \cdot (1-p)^4$ (ii) $\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)$ 2

c) Erläutern Sie anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird. 2

Aufgabensatz 1

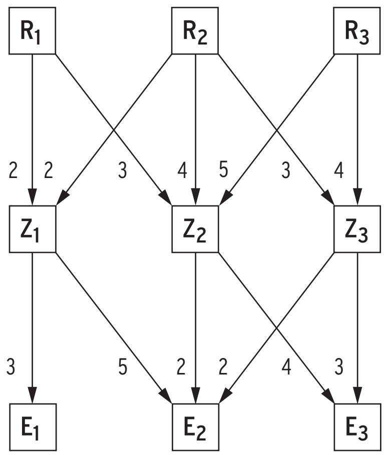
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Pflichtaufgabe Lineare Algebra **Punkte**

Ein Betrieb erzeugt aus drei Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) drei Zwischenprodukte (Z_1, Z_2, Z_3), die zu drei Endprodukten (E_1, E_2, E_3) weiterverarbeitet werden.
Es gibt Werte für a und b, so dass die Zusammenhänge durch den folgenden Verflechtungsgraphen und die Rohstoff-Endprodukt-Tabelle gegeben sind.

Verflechtungsgraph

Angaben in Mengeneinheiten



Rohstoff-Endprodukt-Tabelle

Anzahl der benötigten ME der Rohstoffe je ME des Endprodukts

Rohstoff \ Endprodrukt	E_1	E_2	E_3
R_1	*a*	16	12
R_2	6	*b*	25
R_3	0	18	32

a) Der Zusammenhang Rohstoff-Zwischenprodukt wird durch eine Matrix A_{RZ}, der Zusammenhang Zwischenprodukt-Endprodukt durch eine Matrix B_{ZE} und der Zusammenhang Rohstoff-Endprodukt durch eine Matrix C_{RE} beschrieben.

Geben Sie eine Beziehung zwischen diesen drei Matrizen an. 1

b) Bestimmen Sie die fehlenden Wert für und a b. 2

c) Betrachtet werden die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass B die zu A inverse Matrix ist. 2

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie 2 Aufgaben aus den 4 Wahlaufgaben, davon mindestens eine Analysis-Aufgabe

Wahlaufgabe 1 – Analysis

Punkte

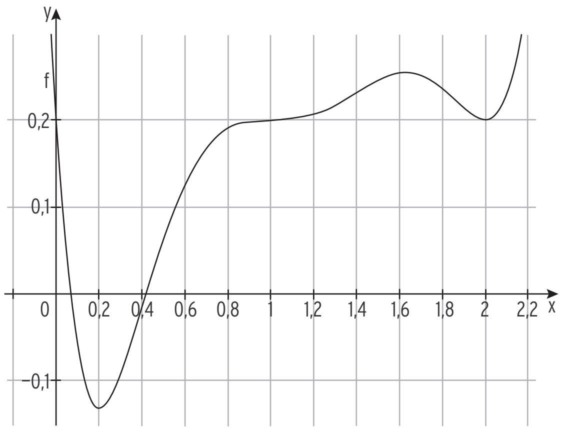
Eine Funktion f ist durch ihre Gleichung $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. 2

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(1 \mid f(1))$. 3

Wahlaufgabe 2 – Analysis

Abgebildet ist der Graph einer Funktion f.



a) Geben Sie je einen Wert für a und b an, so dass gilt:

I $f'(0,2) = a$

II $f''(b) = 0$. 2

b) Markieren Sie einen Punkt $P(x_P \mid y_P)$ auf dem Funktionsgraphen von f, für den gilt: 3

$f''(x_P) = 0$ und $f'(x_P) < 0$.

Begründen Sie, warum der von Ihnen gewählte Punkt P die beiden Bedingungen erfüllt.

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Punkte

Wahlaufgabe 3 Stochastik

60% der Kunden eines Reiseunternehmens reisen gerne in die Region A,

30% in die Region B, 20% reisen in jede der beiden Regionen gerne.

a) Unter denjenigen Kunden, die gerne in die Region A reisen, wird eine Person zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person auch gerne in die Region B reist. 2

b) Berechnen Sie den Anteil der Kunden, die entweder in die Region A oder in die Region B gerne reisen. 3

Wahlaufgabe 4 Lineare Algebra

Im Folgenden sind alle vorliegenden $(n \times n)$ - Matrizen invertierbar. 5

E ist die Einheitsmatrix.

Lösen Sie die Matrizengleichung $(B + A) \cdot (E - A) = (X - B) \cdot A$

nach X auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Aufgabensatz 2

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

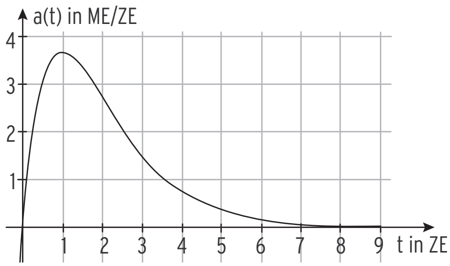
Lösungen Seite 176

Pflichtaufgaben

Punkte

Pflichtaufgabe Analysis

Die PRINTFIX AG fertigt innovative und hochwertige 3D-Drucker. Der momentane Absatz in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit (ME/ZE) kann durch den Graphen a des Produktlebenszyklus $a(t) = 10t \cdot e^{-t}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden.



a) Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt, an dem die PRINTFIX AG die meisten 3D-Drucker pro ZE absetzt. 3

b) In t = 2 liegt eine Wendestelle vor. Interpretieren Sie diese ökonomisch. 2

Pflichtaufgabe Stochastik

In einer Urne U_1 befinden sich vier rote und zwei gelbe Kugeln, in einer Urne U_2 zwei rote, eine gelbe und eine blaue Kugel.

a) Eine der beiden Urnen wird zufällig ausgewählt. Anschließend wird daraus zweimal hintereinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden kann, dass beide entnommenen Kugeln rot sind. 2

b) Eine der beiden Urnen wurde zufällig ausgewählt; aus dieser wurde eine Kugel zufällig entnommen. Die entnommene Kugel ist gelb oder blau. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel aus der Urne U_1 stammt. 3

Pflichtaufgabe Lineare Algebra

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.5 Entscheiden Sie für jeden der Terme A + B und A · B, ob er definiert ist. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung. 2

1.6 Bestimmen Sie für die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Werte von a, b, c und d so, dass $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt. 3